

- (1) (I) $\neg A, \neg B, A \wedge B \vdash \neg B$
 (II) $\neg A, \neg B, A \wedge B \vdash B$ $\wedge$ -odstranění
 (III) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ $\neg$ -zavedení na (I), (II)

- (2) (I) $\neg A, B, A \wedge B \vdash \neg A$
 (II) $\neg A, B, A \wedge B \vdash A$ $\wedge$ -odstranění
 (III) $\neg A, B \vdash \neg(A \wedge B)$ $\neg$ -zavedení na (I), (II)

- (3) (I) $A, \neg B, A \wedge B \vdash \neg B$
 (II) $A, \neg B, A \wedge B \vdash B$ $\wedge$ -odstranění
 (III) $A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ $\neg$ -zavedení na (I), (II)

(4) $\wedge$ -zavedení

$\mu^*(A)$	$\mu^*(B)$	$\mu^*(A \vee B)$		
0	0	0	$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$	(1)
0	1	1	$\neg A, B \vdash A \vee B$	(2)
1	0	1	$A, \neg B \vdash A \vee B$	(3)
1	1	1	$A, B \vdash A \vee B$	(4)

- (1) (I) $\neg A, \neg B, A \vdash B$ $\wedge$ -odstranění negace
 (II) $\neg A, \neg B, B \vdash B$
 (III) $\neg A, \neg B, A \vee B \vdash B$ $\vee$ -odstranění na (I), (II)
 (IV) $\neg A, \neg B, A \vee B \vdash \neg B$
 (V) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ $\neg$ -zavedení na (III), (IV)

(2) $\vee$ -zavedení

(3) $\vee$ -zavedení

(4) $\vee$ -zavedení

$\mu^*(A)$	$\mu^*(\neg A)$
0	1
1	0

$$\neg A \vdash \neg A \quad (1)$$

$$A \vdash \neg \neg A \quad (2)$$

(1) výše

(2) (I) $A, \neg A \vdash A$

(II) $A, \neg A \vdash \neg A$

(III) $A \vdash \neg \neg A$

$\neg$ -zavedení na (I) (II)

30.11.2016

$\mu^*(A)$	$\mu^*(B)$	$\mu^*(A \Leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$$

$$\neg A, B \vdash \neg(A \Leftrightarrow B)$$

$$A, \neg B \vdash \neg(A \Leftrightarrow B)$$

$$A, B \vdash A \Leftrightarrow B$$

(1) (I) $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$ viz výše

(II) $\neg A, \neg B \vdash B \Rightarrow A$ viz výše

(III) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash A \Leftrightarrow B$ $\Leftrightarrow$ -zavedení

(IV) $\neg A, \neg B \vdash A \Leftrightarrow B$ věta 1(2) pro $m=2$,
 $\mu=2$ na (I), (II), (III)

(2) (I) $\neg A, B, A \Leftrightarrow B \vdash \neg(B \Rightarrow A)$ viz výše

(II) $\neg A, B, A \Leftrightarrow B \vdash B \Rightarrow A$ $\Leftrightarrow$ -odstranění

(III) $\neg A, B \vdash \neg(A \Leftrightarrow B)$ $\neg$ -zavedení na (I), (II)

(3) (I) $A, \neg B, A \Leftrightarrow B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$ viz výše

(II) $A, \neg B, A \Leftrightarrow B \vdash A \Rightarrow B$ $\Leftrightarrow$ -odstranění

(III) $A, \neg B \vdash \neg(A \Leftrightarrow B)$ $\neg$ -zavedení na (I), (II)

(4) (I) $A, B \vdash A \Rightarrow B$ viz výše

(II) $A, B \vdash B \Rightarrow A$ viz výše

(III) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash A \Leftrightarrow B$ $\Leftrightarrow$ -zavedení

(IV) $A, B \vdash A \Leftrightarrow B$ věta 1(2) pro $m=2$,
 $r=2$ na (I), (II), (III)

LEMMA 2

Necht je dána pravdivostní tabulka nějaké formule E , obsahující (pouze) proměnné $x_1, \dots, x_m$. Je platí v tabulce odvoditelnosti, odpovídající tvrzení z 2^m řádků tabulky.
Důkaz:

Zvolme řádek pravdivostní tabulky formule E .
 Tomuto řádku odpovídá jistá posloupnost formule Γ , například: je-li $m=4$ a zvolený řádek je

$\nu(x_1)$	$\nu(x_2)$	$\nu(x_3)$	$\nu(x_4)$	$\nu^*(E)$
0	1	1	0	0

je Γ posloupnost $\neg x_1, x_2, x_3, \neg x_4$.

Dále postupujeme indukcí vzhledem ke složitosti formule E :

(a) E je proměnná

Pat E je x_i pro jisté $i \in \{1, \dots, m\}$

Jsou dvě možnosti:

- ve zvoleném řádku je $\nu(x_i) = 0$

Pat vřejně $\Gamma \vdash \neg E$

- ve zvoleném řádku je $\nu(x_i) = 1$

Pat vřejně $\Gamma \vdash E$

(b) E je formule $\neg F$

Jsou dvě možnosti:

- ve zvoleném řádku je $\nu^*(F) = 0$, a tedy $\nu^*(E) = 1$

Pat (pode indukční předpokladem)

$\Gamma \vdash \neg F$

ty. $\Gamma \vdash E$

- ve zvoleném řádku je $p^*(F) = 1$, a tedy

$$p^*(E) = 0$$

Pat (podle indukčního předpokladu) $\Gamma \vdash F$. Podle lemmatu 1: $F \vdash \neg\neg F$, tj. $F \vdash \neg E$. Podle věty 1(2) pro $m=n$, $p=1$ máme $\Gamma \vdash \neg E$, což je chýlí.

(c) E je formule $F \Rightarrow G$

Jsou čtyři možnosti:

- ve zvoleném řádku je $p^*(F) = 0$ a $p^*(G) = 0$, a tedy $p^*(E) = 1$

Pat (podle indukčního předpokladu) $\Gamma \vdash \neg F$, $\Gamma \vdash \neg G$. Podle lemmatu 1: $\neg F, \neg G \vdash F \Rightarrow G$, tj. $\neg F, \neg G \vdash E$. Podle věty 1(2) pro $m=n$, $p=2$ máme $\Gamma \vdash E$, což je chýlí.

- ve zvoleném řádku je $p^*(F) = 0$ a $p^*(G) = 1$, a tedy $p^*(E) = 1$

Pat (podle indukčního předpokladu) $\Gamma \vdash \neg F$, $\Gamma \vdash G$. Podle lemmatu 1: $\neg F, G \vdash F \Rightarrow G$, tj. $\neg F, G \vdash E$.

Podle věty 1(2) pro $m=n$, $p=2$ máme $\Gamma \vdash E$, což je chýlí.

- ve zvoleném řádku je $p^*(F) = 1$ a $p^*(G) = 0$, a tedy $p^*(E) = 0$

Pat (podle indukčního předpokladu) $\Gamma \vdash F$, $\Gamma \vdash \neg G$. Podle lemmatu 1: $F, \neg G \vdash \neg(F \Rightarrow G)$, tj. $F, \neg G \vdash \neg E$. Podle věty 1(2) pro $m=n$, $p=2$ máme $\Gamma \vdash \neg E$, což je chýlí.

- ve zvoleném řádku je $p^*(F) = 1$ a $p^*(G) = 1$, a tedy $p^*(E) = 1$

Pat (podle indukčního předpokladu) $\Gamma \vdash F$, $\Gamma \vdash G$. Podle lemmatu 1: $F, G \vdash F \Rightarrow G$, tj. $F, G \vdash E$. Podle věty 1(2) pro $m=n$, $p=2$ máme $\Gamma \vdash E$, což je chýlí.

(d) E je formule $F \wedge G$

Postupujeme obdobně jako v bodě (c).

(e) E je formule $F \vee G$

Prostupujeme obdobně jako v bodě (c).
 (f) E je formule $F \Leftrightarrow G$
 Prostupujeme obdobně jako v bodě (c).

(24)

LEMMA 3

n -li formule E a lemmatu 2 Autologie (tj. $F \vdash E$),
 pak $x_1 \vee \neg x_1, \dots, x_n \vee \neg x_n \vdash E$.

Důkaz: Princip důkazu ukážeme na příkladě pro $n=3$. Podle lemmatu 2 platí:

$$\begin{array}{l} \neg x_1, \neg x_2, \neg x_3 \vdash E \\ \neg x_1, \neg x_2, x_3 \vdash E \\ \neg x_1, x_2, \neg x_3 \vdash E \\ \neg x_1, x_2, x_3 \vdash E \\ x_1, \neg x_2, \neg x_3 \vdash E \\ x_1, \neg x_2, x_3 \vdash E \\ x_1, x_2, \neg x_3 \vdash E \\ x_1, x_2, x_3 \vdash E \end{array}$$

Chytrák použijeme $\vee$ -odstranění a dostaneme

$$\begin{array}{l} \neg x_1, \neg x_2, x_3 \vee \neg x_3 \vdash E \\ \neg x_1, x_2, x_3 \vee \neg x_3 \vdash E \\ x_1, \neg x_2, x_3 \vee \neg x_3 \vdash E \\ x_1, x_2, x_3 \vee \neg x_3 \vdash E \end{array}$$

Nyní dvakrát použijeme $\vee$ -odstranění:

$$\begin{array}{l} \neg x_1, x_2 \vee \neg x_2, x_3 \vee \neg x_3 \vdash E \\ x_1, x_2 \vee \neg x_2, x_3 \vee \neg x_3 \vdash E \end{array}$$

Dalším použitím $\vee$ -odstranění máme

$$x_1 \vee \neg x_1, x_2 \vee \neg x_2, x_3 \vee \neg x_3 \vdash E.$$

LEMMA 4

Pro libovolnou formuli A máme $\vdash A \vee \neg A$
 (zákon výrocení věcí).
 Důkaz:

- I) $\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$ $\vee$ -zavedení
- II) $\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
- III) $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ $\neg$ -zavedení na (I), (II)
- IV) $\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash A \vee \neg A$ $\vee$ -zavedení

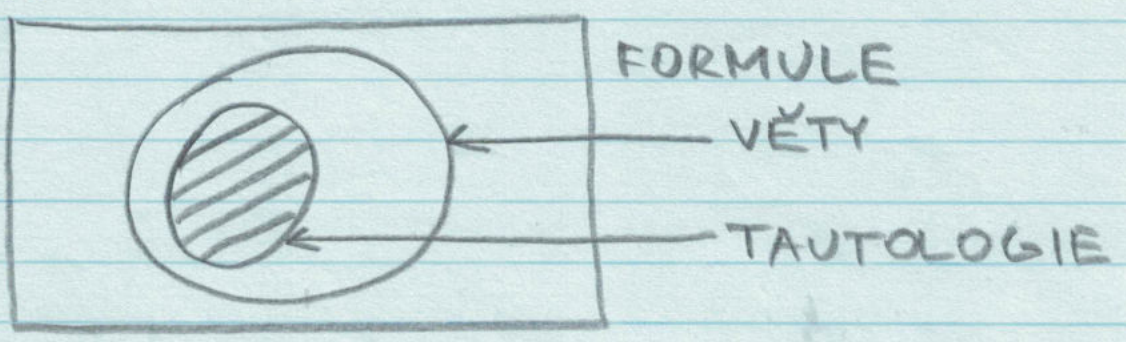
- (V) $\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
- (VI) $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg \neg A$ 7-vedení na (IV), (V)
- (VII) $\vdash \neg \neg(A \vee \neg A)$ 7-vedení na (III), (VI)
- (VIII) $\neg \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$ odstranění dvojité negace
- (IX) $\vdash A \vee \neg A$ věta 1(2) pro $m=0, p=1$

VĚTA 6

Kada tautologie je dokazatelná; symbolicky:
jestliže $\models E$, pak $\vdash E$.

Důkaz: Plyná z lemmatu 3, lemmatu 4 a věty 1(2) pro $m=0, p=n$.

9.12.2016



Tim je zabráněn důkaz toho, že teorie důkazů a teorie modelů na úrovni výrovného počtu jsou stejně silné.

Kada věta nastává v platnosti při rovnosti " $\models$ " a " $\vdash$ " (i naopak).

~~POZNÁMKA (intuicionistický výrobný počet)
základem neklasického výrobného počtu je intuicionistický výrobný počet, který neuvádí principy vyvození třetích $(A \vee \neg A)$ a dvojité negace $(\neg \neg A \Rightarrow A)$~~

~~základem systematického intuicionismu byl Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).~~

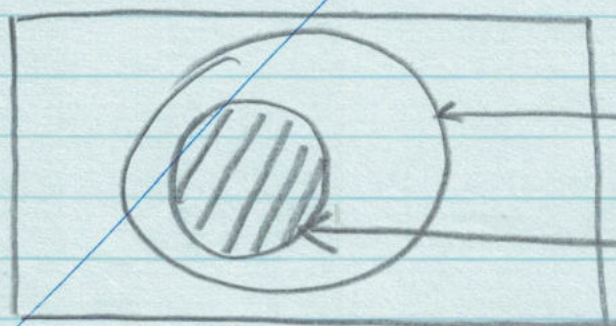
~~intuicionismus postuje v matematice konstruktivní důkaz (modifikace intuicionismu je konstruktivismus). Intuicionista chce dokázat A. Důkaz, utvořený, že předpokládá $\neg A$ vede ke sporu, neformálně na důkaz tvzení A; podle~~

minimální intuicionistický teorie důkazů stavu (26)
je 77A.

Axiomy intuicionistické výpočtu
dostaneme, když sčítáme axiomy 8 ($77A \Rightarrow A$)
nabádíme schémata 8' : $7A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

Když axiomy, který lze dostat ze schématu 8
je dokazatelný klasicky - neboť $\models 7A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
Tedy: všechny věty intuicionistické výpočtu
jsou větami klasické.

Patří to k tomu, že platí. To však nemáme nyní
schopni dokázat.



FORMULE

TAUTOLOGIE = VĚTY
KLASICKÉHO VÝR. POČTU
VĚTY
INTUICIONISTICKÉHO
VÝR. POČTU

CVIČENÍ

Obvinění Brown, Jones a Smith pod přísahou
vyprávějí:

BROWN: Jones je vinen a Smith je nevinen.

JONES: Jestliže Brown je vinen, pak je vinen
i Smith.

SMITH: Já jsem nevinen, ale aspoň jeden
z těch dvou je vinen.

Trváme B, J a S vyprávějí: "Brown je nevinen",
"Jones je nevinen", "Smith je nevinen".

Vyjadřuje vyprávějí také obviněných
formulí. Podobně pravdivostní tabulky
kristálních formulí. Pak odpovězte na
následující otázky:

(a) Mohou být vyprávějí všech tří obviněných
současne pravdivé?

(b) Vyprávějí jednoho z obviněných plyne

2) vyprávějí druhé to; o galijah vyprávějí (27)
je řeč?

- (c) Mladý je osvědčený tři nevině, kdo se
dopustil krádeže? (28)
(d) Mladý je osvědčený, že vyprávějí všech obviněných
je pravdivé. Kdo je nevině a kdo vině?
(e) Jestliže nevině bratři pravdu, a vině bratři,
kdo potom je nevině a kdo vině?

Řešení:

BROWN: $\neg J \wedge S$

JONES: $\neg B \Rightarrow \neg S$

SMITH: $S \wedge (\neg B \vee \neg J)$

B	J	S	BROWN $\neg J \wedge S$	JONES $\neg B \Rightarrow \neg S$	SMITH $S \wedge (\neg B \vee \neg J)$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0

(a) Mladý

(b) Smithova vyprávějí plyač Brown

(c) Brown a Smith

(d) Nevině je Brown a Smith, vině je Jones.

(e) Nevině je Jones, vině je Brown a Smith.

9.12.2015

II) Writing a relace

A) Relace

1) Unární relace

7) Varianty výrokové kalkulace

VÍCEHODNOTOVÝ VÝROKOVÝ KALKUL

Lukasiewicz (1920) měl dvoudobný výrokový počet, jehož serie modelů je relevantní v počtu tří pravostranných hodnot místo našich dvou.

Roku 1921 byl objeven (nezávisle na Lukasiewiczovi) klasický (tj. dvoudobný) výrokový počet na n-hodbovém výrokovém počtu pro libovolné celé číslo $n, n \geq 2$.

MODÁLNÍ VÝROKOVÝ KALKUL

Modální výrokový počet pracuje s logickými pojmy jako "A je nutné" (symbolicky $\Box A$), a "A je možné" (symbolicky $\Diamond A$ nebo $\neg \Box \neg A$).

Tyto pojmy vznikají v těchto oblastech myšlení, kde se vyskytují dva druhy "přirození", a nikoli jeden, na něž univerzální a "zvrácený" charakter má důležitý vliv. Například, není třeba, aby $2+2=5$ (to je ve spore s principem identifikace), ale je možné, aby se uplatnil libovolný oceňovací systém peněz (to je ve spore s principem fyzikální filozofie zoologické, je třeba salamandry nebo jiných zvířat, kteří by mohli žít v ohni, není třeba; aniž je možné (i když nepřírodní), aby existovali jedinci; je také možné (ažli nepřírodní), aby existoval podivný svět.

Modální logiky vznikly podnětem ruského filosofa ^{MODÁLNÍ} Lenina (1912, 1917), Senia a Langforda (1932).

INTUICIONISTICKÝ VÝROKOVÝ KALKUL

Intuicionistický výrokový počet navrhl principy vyřazení
kontra $(A \vee \neg A)$ a dvojité negace $(\neg\neg A \Rightarrow A)$.

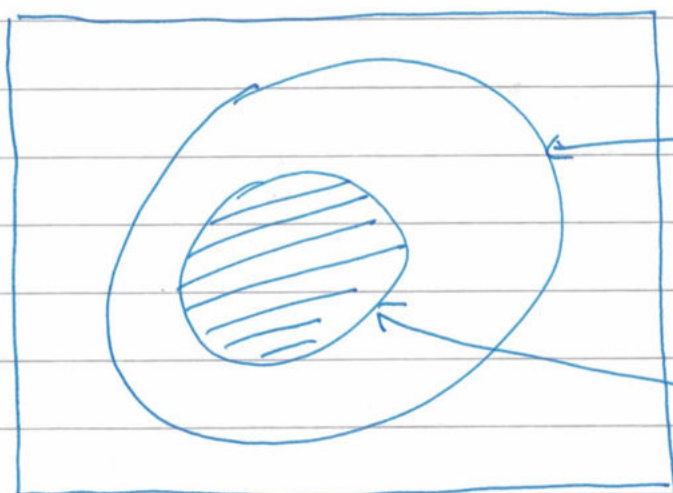
Akory intuicionistického výrokového počtu dokazuje, že platí
axiomy 8 $(\neg\neg A \Rightarrow A)$ následně schémata
8': $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

Když axiomy, když se přidá ke schématu 8', je dostatečný
systém - což $\models \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

$\nu^*(A)$	$\nu^*(B)$	$\nu^*(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tedy: větý větý intuicionistického výrokového počtu je
větmi klasického.

Ještě něco navíc uplatní. To vše znamená nyní schéma dokázat.



FORMULE

TAUTOLOGIE = VĚTY
KLASICKÉHO VÝROKOVÉHO
POČTU

VĚTY

INTUICIONISTICKÉHO
VÝROKOVÉHO POČTU.