UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Základy matematiky KMA/ZAM
Teoretické základy informatiky I KI/TZI1

Přednáška 04
Důkazy

jiri.cihlar@ujep.cz

O čem budeme hovořit:

- Typy důkazů,
- příklady důkazů různých typů.

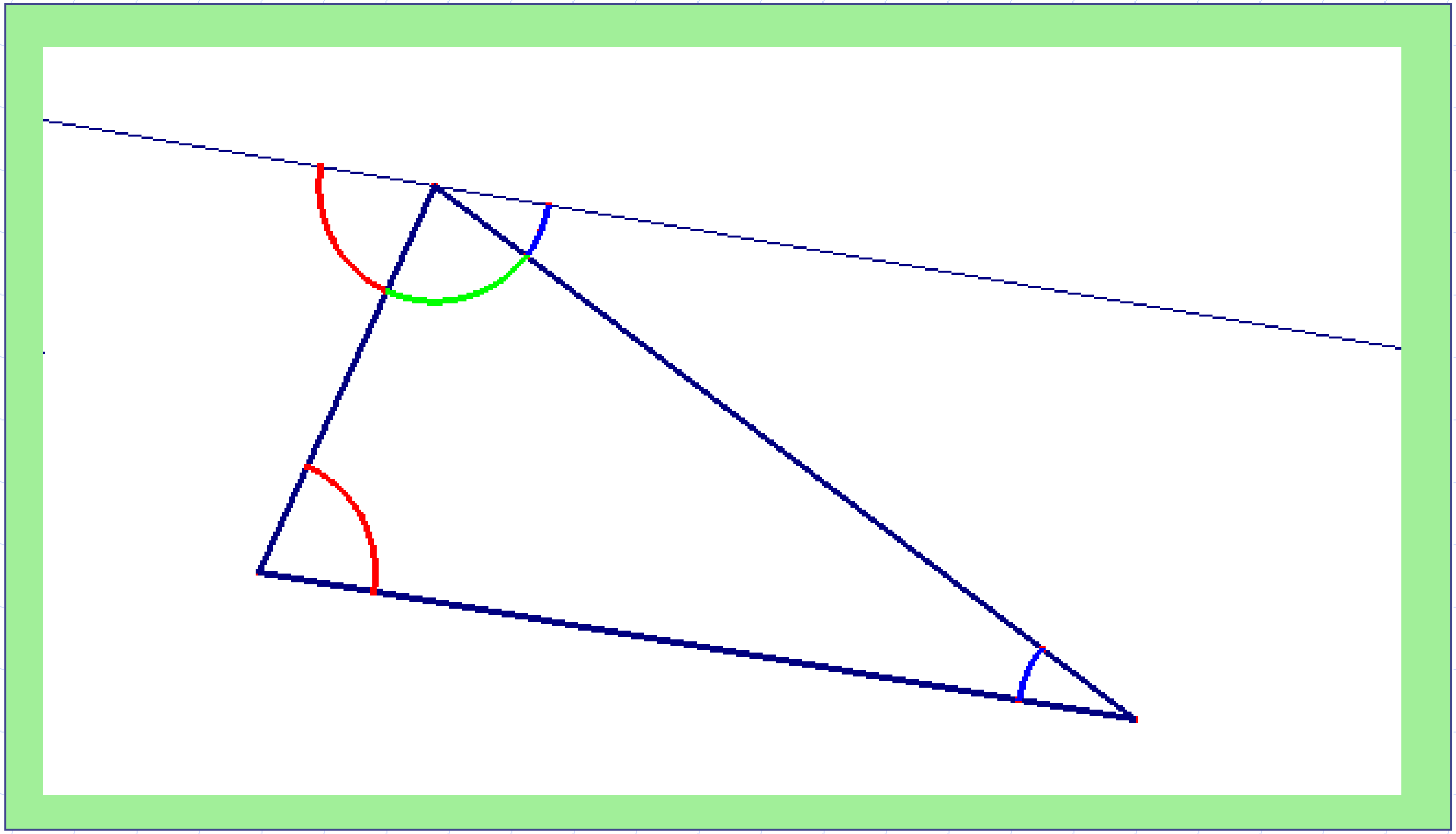
Typy důkazů

Jaké typy důkazů jsou důležité

- Přímý důkaz
- Nepřímý důkaz
- Důkaz sporem
- Důkaz indukcí (speciálně matematickou indukcí)
- Konstruktivní existenční důkaz
- Nekonstruktivní existenční důkaz
- Důkaz výpočtem
- Geometrický důkaz

Přímý důkaz

Jak dokázat větu o součtu úhlů v trojúhelníku?



Využijeme vlastnost střídavých úhlů.

Věty o dělitelnosti přirozených čísel

Zopakujme si definici dělitelnosti přirozených čísel:

$$a \mid b \Leftrightarrow_D (\exists k \epsilon N)\ k \cdot a = b$$

Dokažme podle této definice následující věty:

$$(\forall a \epsilon N)\ \ 1 \mid a \ \wedge \ a \mid a$$

$$(\forall a \epsilon N)(\forall b \epsilon N)\ \ a \mid b \ \rightarrow a \ \leq b$$

$$(\forall a \epsilon N)(\forall b \epsilon N)\ \ a \mid b \ \wedge \ b \mid a \rightarrow a = b$$

$$(\forall a \epsilon N)(\forall b \epsilon N)(\forall c \epsilon N)\ a \mid b \wedge b \mid c \rightarrow a \mid c$$

Nepřímý důkaz

Princip nepřímého důkazu a příklad

Tento důkaz využíváme u vět, které mají tvar implikace. Tuto implikaci nahradíme obměněnou větou podle následující tautologie:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Příklad:

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

Jestliže je n^2 sudé, pak n je také sudé.

Důkaz sporem

Princip důkazu sporem a příklad

- Důkaz sporem využívá následující tautologie:

$$(\neg \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B})) \rightarrow \mathbf{A}$$

Chceme-li tedy dokázat výrok **A**, budeme naopak předpokládat, že platí $\neg$ **A**, a důkaz skončí, pokud odvodíme nějaký spor $(\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B})$.

Příklad:

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 3$ platí:

číslo $n^3 - 11n$ je sudé.

Prvočísel je nekonečně mnoho!

Věděl to už Eukleides! A jak to dokázal?

Věděl, že každé číslo je dělitelné alespoň jedním prvočíslem, a věděl jak jsou rozloženy násobky čísel.

Uvažoval takto:
Nechť existuje jen konečně mnoho prvočísel.
Udělám jejich součin a přičtu číslo jedna.
Toto číslo je dělitelné alespoň jedním prvočíslem.
Může být toto prvočíslo jedním z původních?
A co tedy z těchto úvah vyplývá?

Iracionalita odmocnin z prvočísla

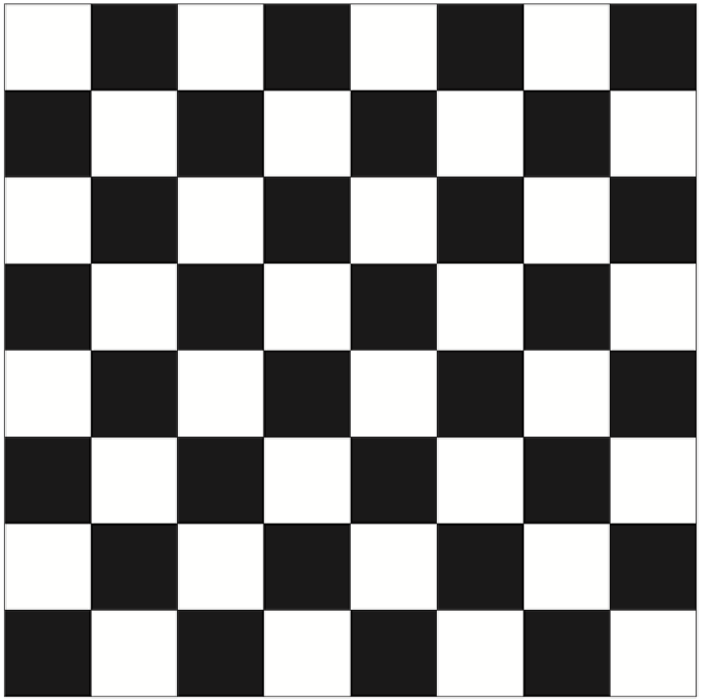
Ukažme si ideu důkazu na odmocnině ze dvou. Budeme užívat již dokázané tvrzení:

Jestliže je n^2 sudé, pak n je také sudé.

Předpokládáme tedy, že $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, kde a, b jsou nesoudělná přirozená čísla (zlomek je zkrácen).
Pak $a^2 = 2 \cdot b^2$, a tedy a^2 je číslo sudé.
Odtud plyne, že i číslo a je sudé, tedy $a = 2 \cdot c$.
Dosazením máme, že $4 \cdot c^2 = 2 \cdot b^2$, tj. $b^2 = 2 \cdot c^2$.
Číslo b^2 je tedy sudé, a tedy i číslo b je sudé.
Obě čísla a, b jsou tedy sudá, což je spor s jejich nesoudělností.

Kůň na šachovnici

Projděte šachovým koněm postupně všechna pole šachovnice tak, že začnete na levém dolním poli **a1** a skončíte na pravém horním poli **h8** !



Tah požadovaný v úloze nelze nalézt!
Dokážete vymyslet, proč to není možné?

Jeden zajímavý uzavřený tah koněm:

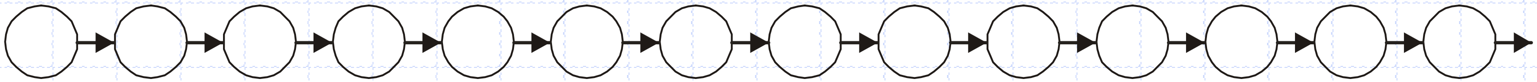
50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Důkaz indukcí
(speciálně matematickou indukcí)

Vysvětlení principu důkazů matematickou indukcí

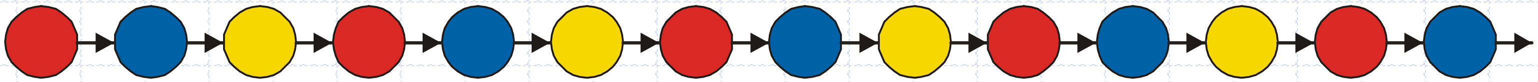
Základní situace je tato:

Pracujeme s nekonečnou řadou korálků a na základě určitých podmínek usuzujeme, jakou mají barvu.



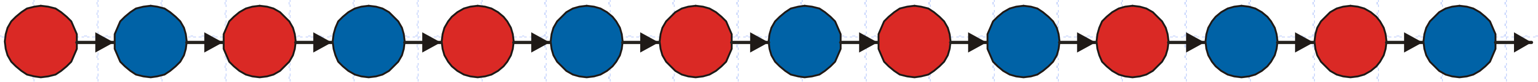
Například:

- Počáteční korálek je červený.
- Jestliže je kterýkoliv z korálků červený, pak následující korálek je modrý.
- Jestliže je kterýkoliv z korálků modrý, pak následující je žlutý.
- Jestliže je kterýkoliv z korálků žlutý, pak následující je červený.



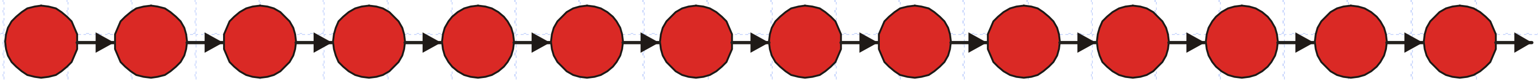
Nebo můžeme stanovit tyto podmínky:

- Počáteční korálek je červený.
- Jestliže je kterýkoliv z korálků červený, pak následující korálek je modrý.
- Jestliže je kterýkoliv z korálků modrý, pak následující je červený.



A co když budou splněny tyto podmínky?

- Počáteční korálek je červený.
- Jestliže je kterýkoliv z korálků červený, pak následující korálek je také červený.



Místo korálků si můžeme představovat přirozená čísla.

Místo vlastnosti korálků (je červený), si pak můžeme představovat libovolnou vlastnost přirozených čísel (třeba danou nějakou formulí).

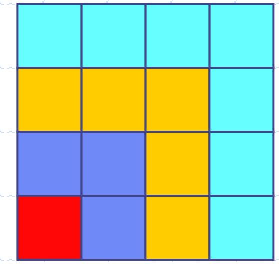
Právě jsme odhalili princip důkazu matematickou indukcí:

Jestliže zjistíme dva fakty:

- **přirozené číslo 1 má určitou vlastnost a**
- **platí implikace: jestliže tuto vlastnost má nějaké přirozené číslo n, pak ji má i následující přirozené číslo n + 1,**

pak můžeme tvrdit, že tuto vlastnost mají všechna přirozená čísla.

Důkaz matematickou indukcí – 1



Věta:

Pro každé přirozené číslo *n* platí, že:

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Důkaz:

1. **Nejprve dokážeme, že:** $s_1 = 1^2$.
2. **Pak dokážeme, že:**

   jestliže $s_n = n^2$ **, pak** $s_{n+1} = (n+1)^2$.

Důkaz matematickou indukcí – 2

Dokazujme tuto větu:

Pro každé přirozené číslo n platí, že:

číslo $n^3 - n$ je násobkem 3.

Důkaz:

1. **Nejprve dokážeme, že:**
   číslo $1^3 - 1$ je násobkem 3.
2. **Pak dokážeme, že:**
   je-li číslo $n^3 - n$ násobkem 3 ,
   pak i číslo $(n+1)^3 - (n+1)$ je násobkem 3.

Posloupnost Fibonacciho čísel

Fibonacciho čísla jsou definována takto:

$$F_1 = 1, F_2 = 1$$

a pro všechna přirozená n platí, že

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ .$$

První členy jsou *1, 1, 2, 3, 5, 8,* … atd.

Bude nás zajímat součet prvních *n* členů této posloupnosti, tedy

$$S_n = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots + F_n\ .$$

Důkaz matematickou indukcí – 3

Dokazujme tuto větu:

Pro každé přirozené číslo *n* platí, že součet prvních *n* Fibonacciho čísel má tvar

$$S_n = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots.. + F_n = F_{n+2} - 1$$

Důkaz:

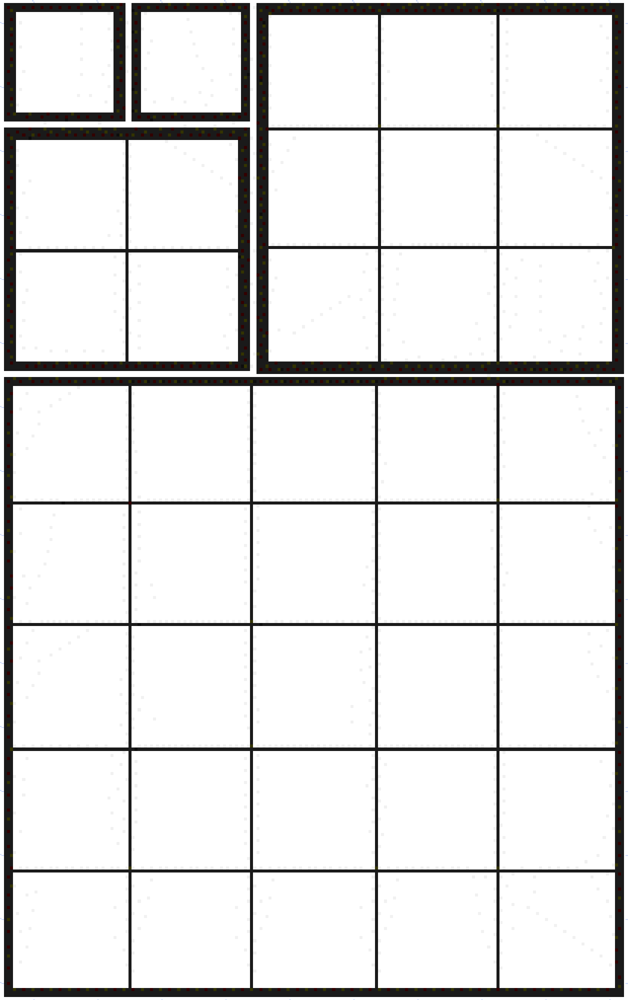
1. **Nejprve dokážeme, že:** $S_1 = F_3 - 1$
2. **Pak dokážeme, že platí implikace:**

jestliže $S_n = F_{n+2} - 1$ **, pak** $S_{n+1} = F_{n+3} - 1$

Součet druhých mocnin Fibonacciho čísel

Dokážete podle obrázku snadno sečíst druhé mocniny prvních pěti Fibonacciho čísel?

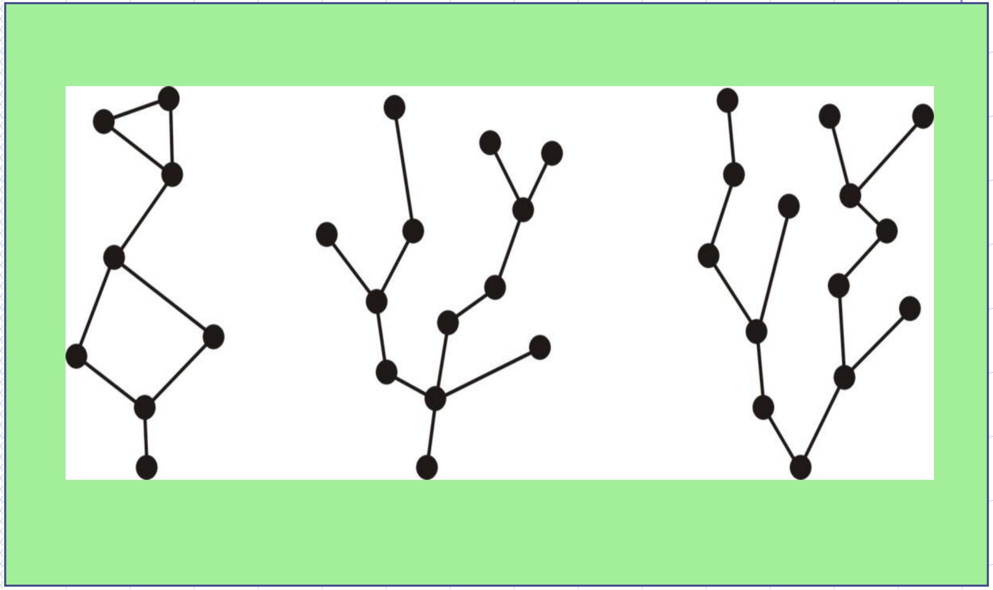
Dokážete zformulovat obecný vzorec pro součet druhých mocnin prvních *n* Fibonacciho čísel?



A jak tuto větu dokázat?

Induktivní důkaz (počty uzlů a hran ve stromech)

Tzv. **grafy** mají **uzly** a **hrany** (spojnice dvou uzlů). Navazující hrany tvoří **cesty**, uzavřená cesta se nazývá **cyklus**.



Grafy, které nemají žádný cyklus, se nazývají **stromy**.

Spočítejte pro libovolný strom počet jeho uzlů a hran.

Dokážete vyslovit obecnou větu o počtech uzlů a hran v libovolném stromu? A dokázat ji?

Vlastnost symetrických čísel

Symetrickým číslem (palindromem) nazýváme číslo, které má sudý počet cifer, a když jej „čteme pozpátku“, tak se nezmění.

Příklady: 624426 , 5775 , 1003443001 , atd.

Platí tato věta: ***Všechna symetrická čísla jsou násobky jedenácti.***

Příklad k pochopení základní myšlenky důkazu:

624426 = 6 . 100001 + 10 . 2 . 1001 + 100 . 4 . 11

Symetrická čísla – důkaz věty

K důkazu stačí prokázat, že:

- čísla 11, 1001 a 100001 jsou násobky jedenácti,
- je-li libovolné číslo násobkem jedenácti, pak i jeho přirozený násobek je opět násobkem jedenácti,
- a jsou-li dvě libovolná čísla násobky jedenácti, pak i jejich součet je násobkem jedenácti.

Konstruktivní existenční důkaz

Divná hustota prvočísel

Existují tzv. **prvočíselná dvojčata,** například:

(3,5) (5,7) (11,13) (17,19) (41,43) …..

Zda je jich konečně mnoho anebo nekonečně mnoho zatím nevíme, je to dosud nevyřešený matematický problém!

Na druhé straně **mezi dvěma sousedními prvočísly může být libovolně velká mezera**, která je tvořena jen složenými čísly!

Příklad **sto** za sebou jdoucích složených čísel:

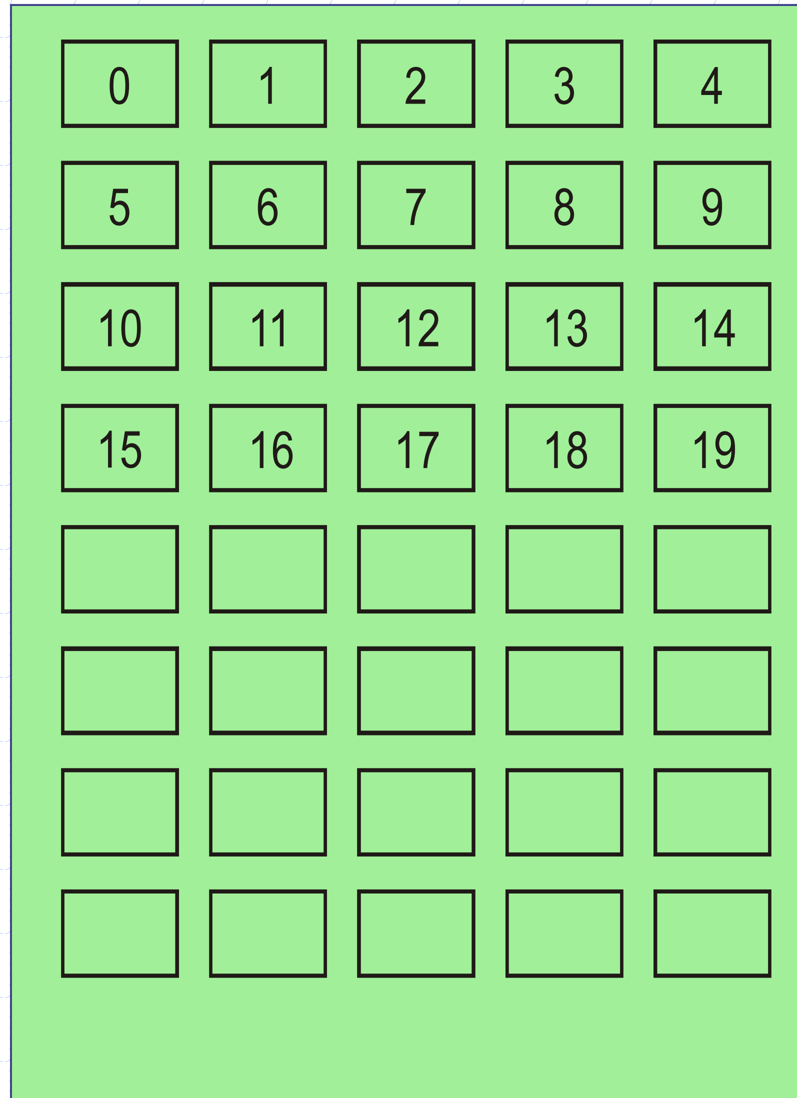
101! + 2, 101! + 3, 101! + 4, ….. , 101! + 101

Nekonstruktivní existenční důkaz

Vlasatí Pražáci

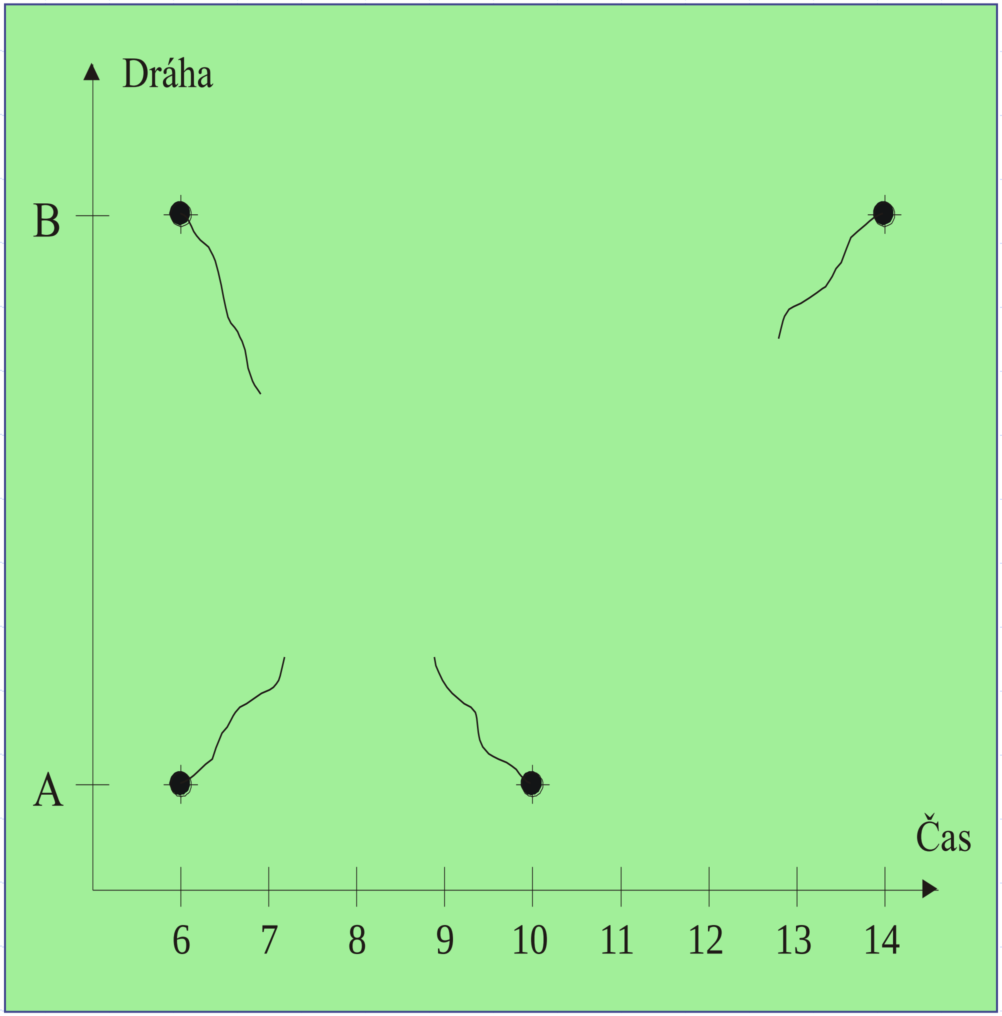
Jak dokázat, že v Praze existují dva lidé s přesně stejným počtem vlasů?

Pomohou nám myšlené „přihrádky“, označené čísly 0, 1, 2, 3, 4, až 100 000 .



Turista v horách

- Turista vyšel z vesnice v 6 hodin ráno a na horskou chatu dorazil ve 14 hodin.
- Druhý den vyšel z horské chaty opět v 6 hodin a po stejné cestě dorazil do vesnice v 10 hodin.

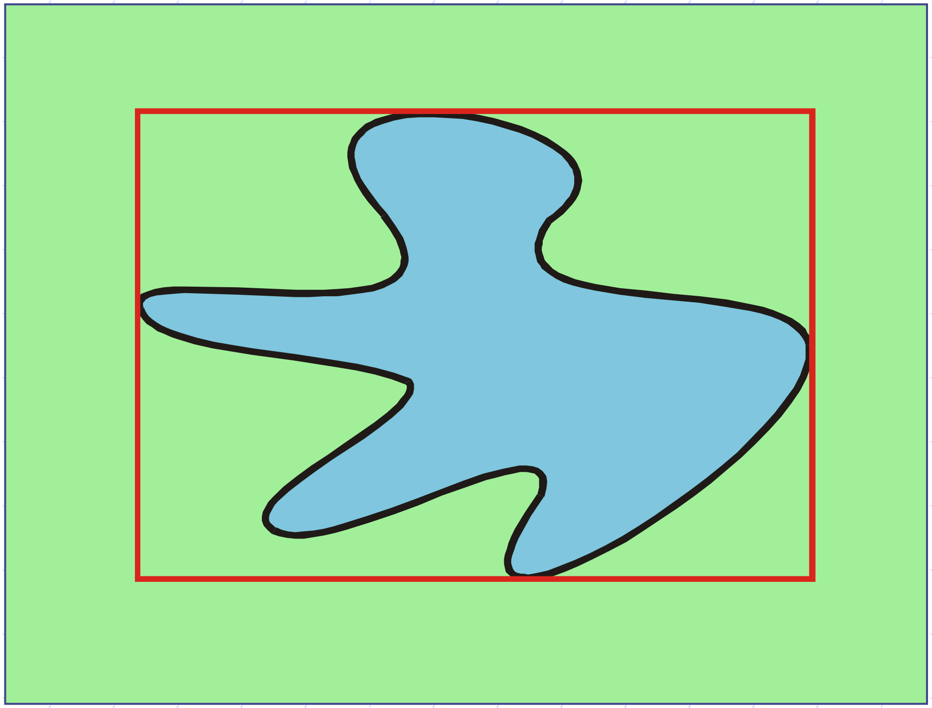


Jak dokázat, že v oba dva dny byl na určitém místě v přesně stejném čase?

Čtverec opsaný křivce

Platí tato věta:

Každé jednoduché uzavřené hladké křivce lze opsat čtverec.



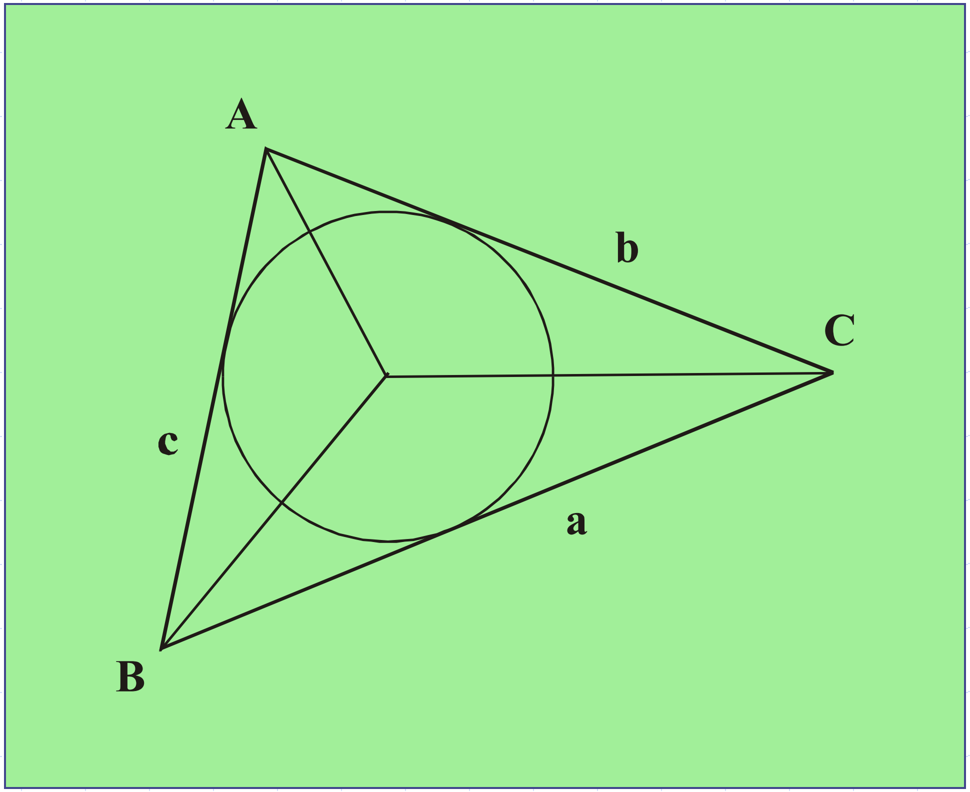
Jak větu dokázat?

Důkaz výpočtem

Poloměr kružnice vepsané

Jak souvisí poloměr kružnice trojúhelníku vepsané s jeho obsahem a obvodem?

Odvození je jednoduché:



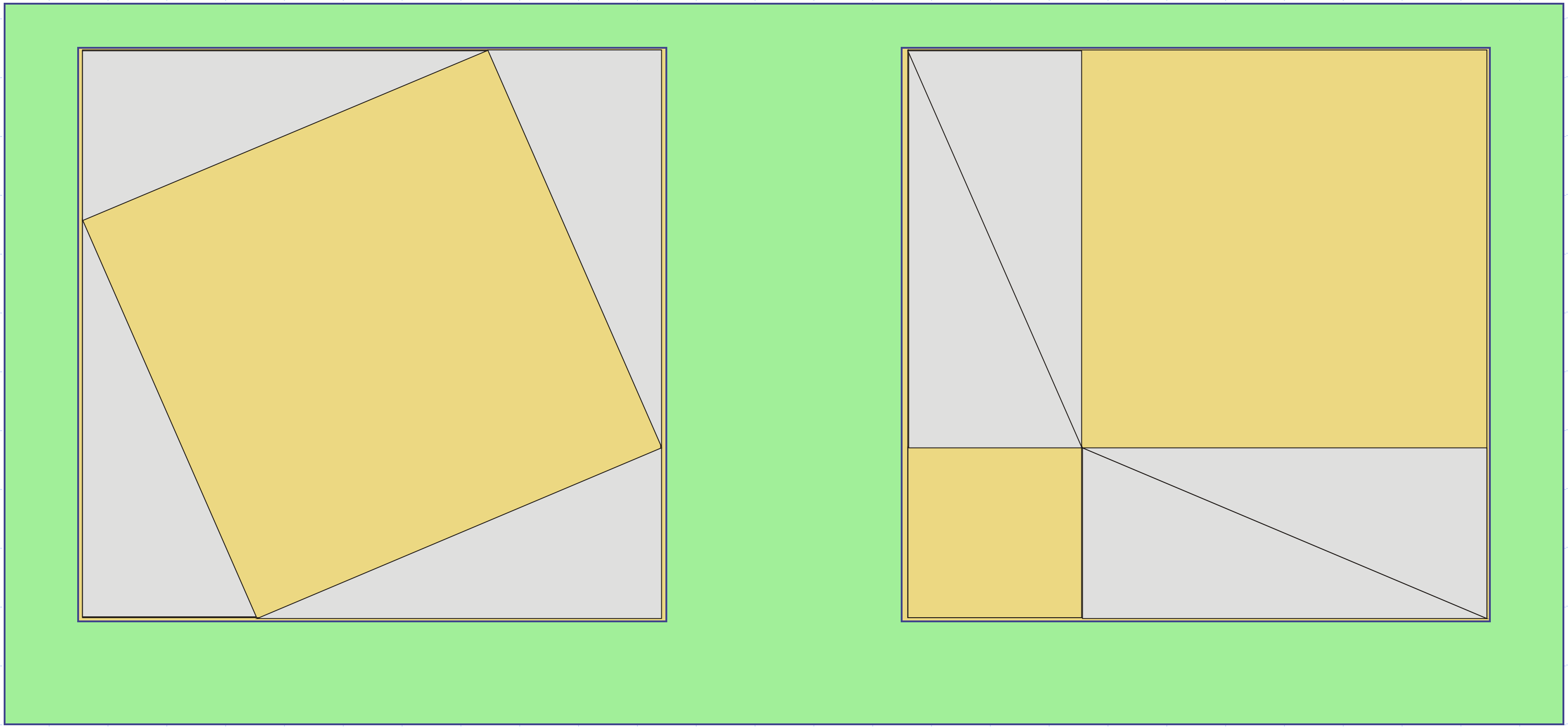
$$S_{ABC} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{ACS} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r \cdot (a+b+c)}{2}$$

$$r = \frac{2 \cdot S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot S}{o}$$

A teď změna dimenze!

Geometrický důkaz

Jak vyvodit Pythagorovu větu?



Porovnejte velikost hnědých ploch!

Co je třeba znát a umět?

- Rozlišovat různé typy důkazů,
- umět tvořit jednoduché přímé a nepřímé důkazy,
- umět dělat důkazy sporem,
- zvládat důkazy matematickou indukcí,
- rozumět principu obecných induktivních důkazů,
- rozumět principu existenčních důkazů,
- umět tvořit důkazy pomocí výpočtů.

Děkuji za pozornost