

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM



Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Základy matematiky
Teoretické základy informatiky I

KMA/ZAM
KI/TZI1

Přednáška 05
Množiny

jiri.cihlar@ujep.cz



O čem budeme hovořit:

- **Rovnost a inkluze množin**
- **Operace s množinami**
- **Věty o množinách a jejich důkazy**
- **Kartézský součin množin**

Rovnost a inkluze množin

Co to jsou množiny?

Intuitivně se pojem množiny zavádí tak, že je to:

soubor určitých objektů, u kterého je možné rozhodnout, zda libovolně zvolený objekt do souboru patří či nepatří.

Příklady:

- Množinu můžeme určit **výčtem jejích prvků**:
například $\{ 1; a; \# \}$.
- Množinu můžeme určit **charakteristickou vlastností jejích prvků**:
například $\{ x \in \mathbb{R} ; x > 100 \}$.

Intervaly v množině $\mathbf{R}$

Uzavřený interval

- $\langle a ; b \rangle = \{x \in \mathbf{R} ; a \leq x \leq b\}$

Otevřené intervaly

- $(a ; b) = \{x \in \mathbf{R} ; a < x < b\}$
- $(a ; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} ; a < x\}$
- $(-\infty ; b) = \{x \in \mathbf{R} ; x < b\}$

Polouzavřené intervaly

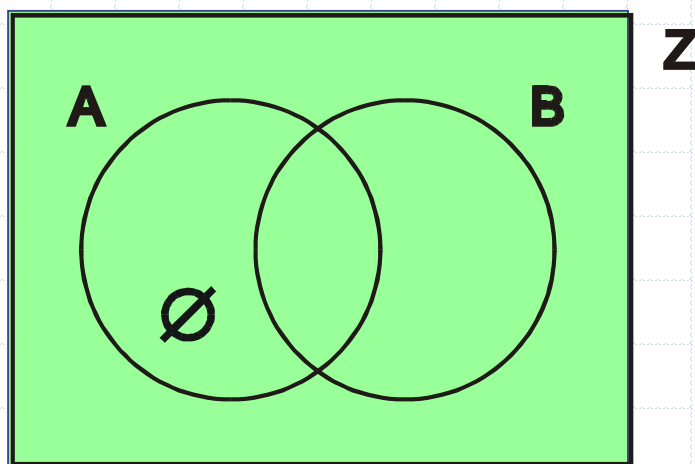
- $\langle a ; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} ; a \leq x\}$, atd.

Vztahy mezi množinami - inkluze

Aby byla množina **A** „částí“ množiny **B**, musí být každý prvek množiny **A** také prvkem množiny **B**. Inkluze („být podmnožinou“):

$$\mathbf{A \subseteq B \Leftrightarrow_D (\forall x) x \in A \rightarrow x \in B}$$

$$\neg (A \subseteq B) \Leftrightarrow (\exists x) x \in A \wedge \neg (x \in B)$$

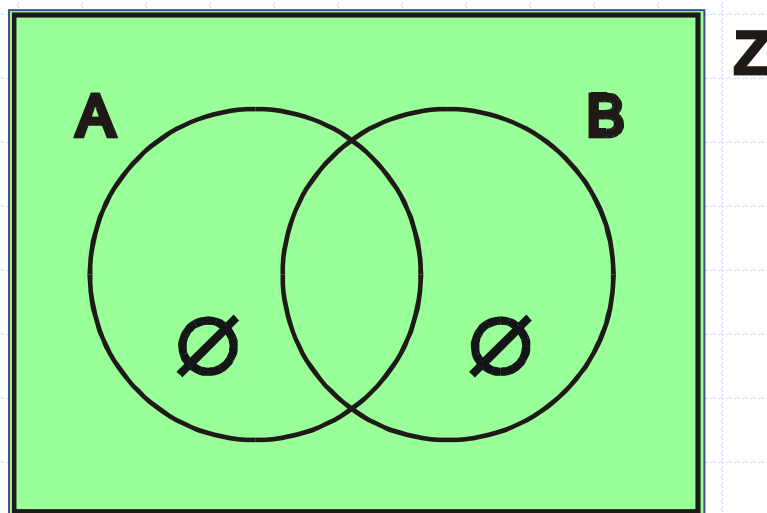


Vztahy mezi množinami - rovnost

Aby byly množiny **A** , **B** sobě rovny, musí se skládat z též prvků. Rovnost množin:

$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow_D (\forall x) x \in A \leftrightarrow x \in B}$$

$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)}$$



Univerzální třída a prázdná množina

Třída, která obsahuje všechny myslitelné objekty se označuje V a nazývá se **univerzální třída**.

Množina, která neobsahuje žádný prvek, se označuje $\emptyset$ a nazývá se **prázdná množina**.

Definice

$$x \in V \Leftrightarrow x = x$$

$$x \in \emptyset \Leftrightarrow x \neq x$$

$$V = \{ x ; x = x \}$$

$$\emptyset = \{ x ; x \neq x \}$$

Snadno se dokáže, že platí:

$$(\forall A) \emptyset \subseteq A \wedge A \subseteq A \wedge A \in V \wedge A \subseteq V$$

Operace s množinami

Označení pro operace s množinami

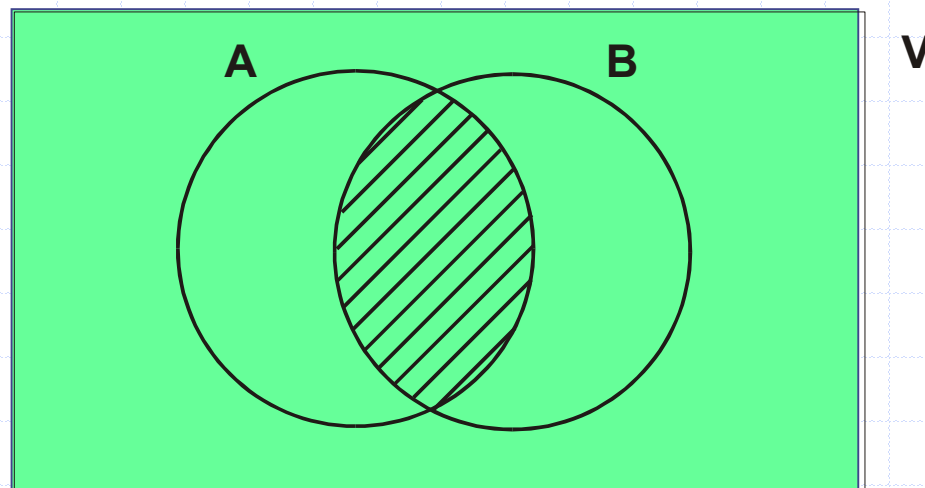
Základními operacemi jsou:

průnik, sjednocení a rozdíl množin.

Značení jsou v následující tabulce:

Název	Symbolický zápis
Průnik množin A, B	$A \cap B$
Sjednocení množin A, B	$A \cup B$
Rozdíl množin A, B	$A - B$

Průnik množin



Průnik množin **A**, **B** budeme označovat
 $A \cap B$.

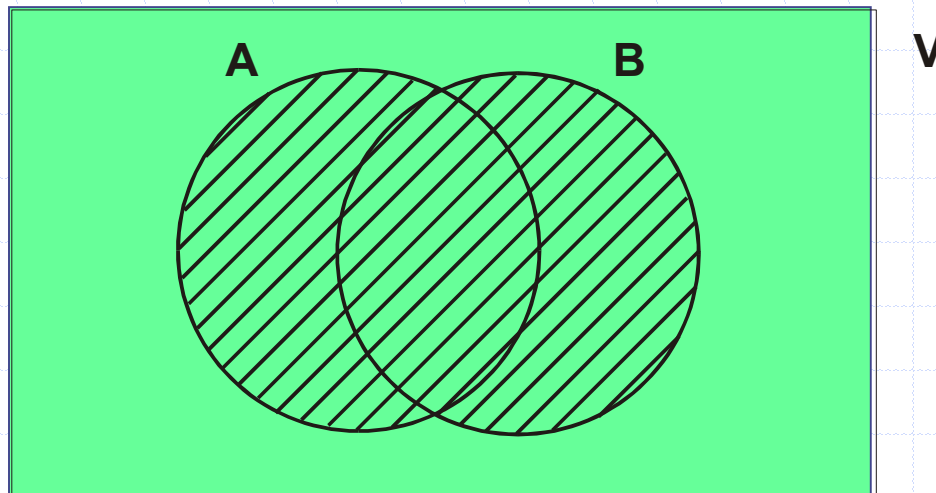
Je to množina takových prvků, které náleží oběma těmto množinám.

Definice

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

Sjednocení množin



Sjednocení množin **A, B** budeme označovat $A \cup B$.

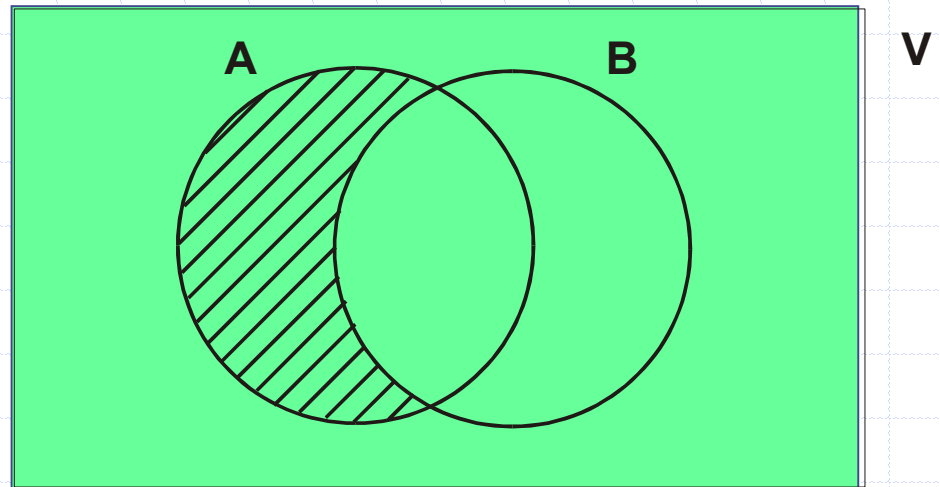
Je to množina takových prvků, které náleží alespoň jedné z těchto množin.

Definice

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

Rozdíl množin



Rozdíl množin A, B budeme označovat $A - B$.

Je to množina takových prvků, které náleží první množině, ale zároveň nenáleží druhé množině.

Definice

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

Operace s intervaly v množině $\mathbb{R}$

Necht' pro reálná čísla platí: $a < b < c < d$.

Jaké množiny vzniknou těmito operacemi?

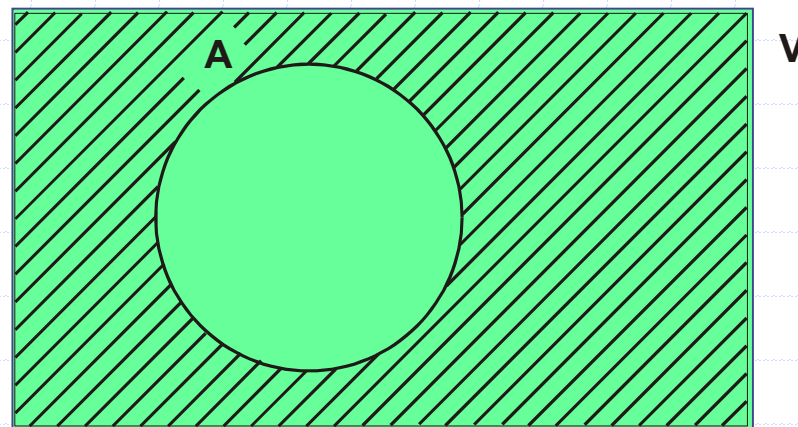
- $(a ; c) \cap (b ; d) =$
- $(a ; c) \cup (b ; d) =$
- $(a ; c) - (b ; d) =$
- $(-\infty ; c) \cap (b ; +\infty) =$
- $(-\infty ; c) \cup (b ; +\infty) =$
- $(-\infty ; c) - (b ; +\infty) =$

Operace s množinami bodů

Jaké množiny mohou vzniknou těmito operacemi?

- průnik dvou přímek
- průnik přímky a kružnice
- průnik dvou trojúhelníků
- sjednocení dvou úseček
- sjednocení dvou soustředných kruhů
- rozdíl dvou soustředných kruhů

Doplňěk množiny



Rozdíl $V - A$ budeme nazývat **doplňkem** množiny A a označovat $-A$.

Doplňěk množiny obsahuje všechny prvky, které do původní množiny nepatří.

Definice

$$x \in -A \Leftrightarrow x \notin A$$

$$-A = \{x; x \notin A\}$$

Potence množiny

Prvky **potence množiny A**, kterou označujeme $\text{Pot}(A)$, jsou všechny podmnožiny množiny A.

Definice

$$x \in \text{Pot}(A) \Leftrightarrow_D x \subseteq A$$

$$\text{Pot}(A) = \{ x ; x \subseteq A \}$$

Příklady:

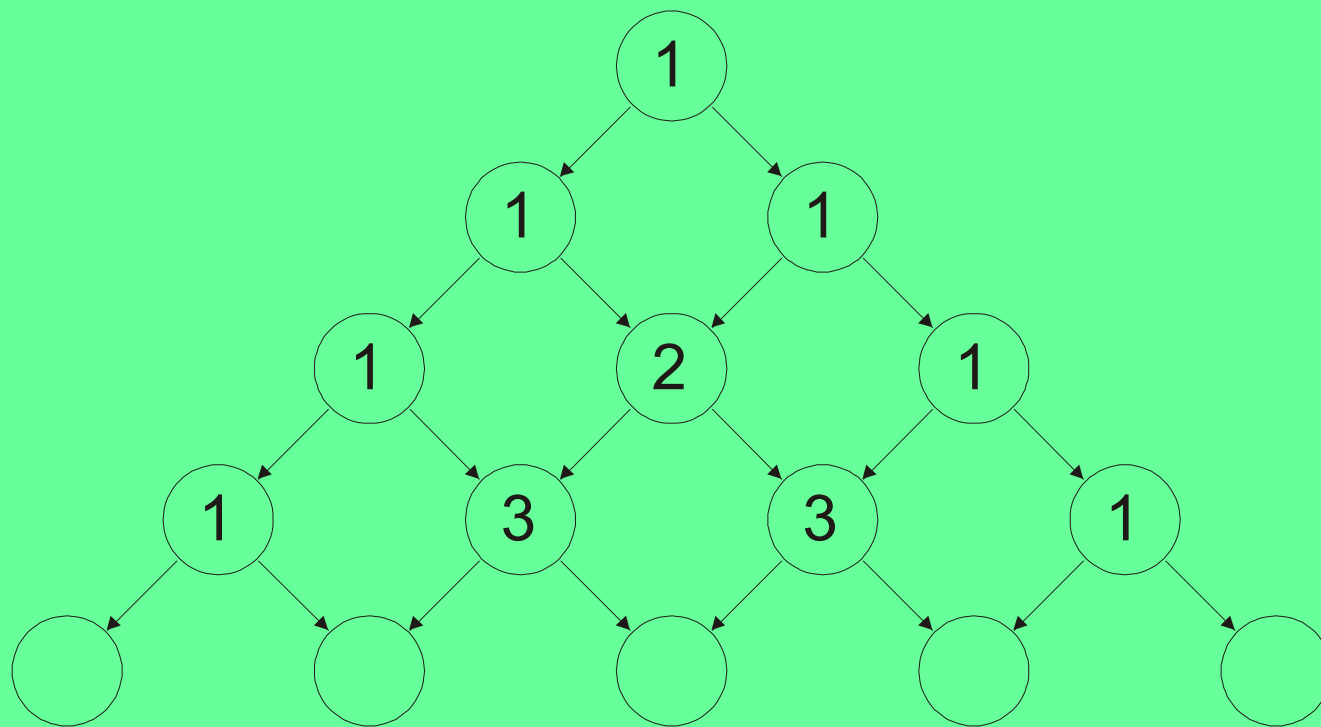
$$\text{Pot}(\{a, b\}) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$$

$$\text{Pot}(\{a\}) = \{ \emptyset, \{a\} \}$$

$$\text{Pot}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$$

Počet prvků potence konečné množiny

Jestliže má množina A n prvků, pak $\text{Pot}(A)$, tedy potence množiny A , má 2^n prvků.



Věty o množinách a jejich důkazy

Jak dokazovat věty o vlastnostech množin?

Dokažme například větu:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

Máme dvě možnosti.

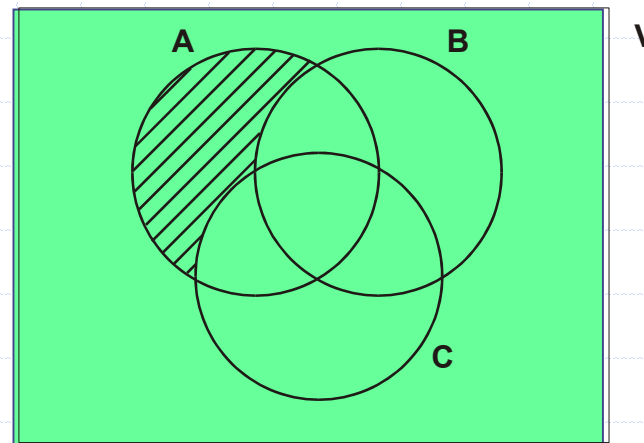
1) Problém můžeme převést podle definic na **tautologii**:

$$(\forall x) x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$$

atd.

2) Užijeme tzv.

Vennovy diagramy:



Vlastnosti operací s množinami

Vět o množinách je mnoho, dokazují se buď pomocí definic přechodem k tautologiím nebo pomocí tzv. Vennových diagramů.

$$-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$$

$$-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$$

$$-(A - B) = (-A) \cup B$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

atd.

Další důležité věty o množinách

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A = A \cap A = A \cup A = A \cap V = A \cup \emptyset = A - \emptyset$$

$$A \cap B \subseteq A$$

$$A \subseteq A \cup B$$

$$A \cap B \subseteq B$$

$$B \subseteq A \cup B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Kartézský součin množin

Uspořádané dvojice

V matematice často pracujeme s pojmem **uspořádaná dvojice**. (Setkali jste se s ním například u souřadnic bodů v rovině.)

Jsou-li dány objekty, například **a, b, c, d, e**, můžeme z nich vytvářet uspořádané dvojice, například:

$[a;b]$, $[a;c]$, $[b;d]$, $[d;b]$, $[c;b]$, $[e;e]$, atd.

V uspořádaných dvojicích je podstatné, který objekt je prvním členem dvojice, a který objekt je druhým členem dvojice.

Kartézský součin množin

Definice:

Pro každé dvě množiny **A**, **B** definujeme jejich kartézský součin **A × B** takto:

$$\mathbf{A \times B =_D \{ [a;b] ; a \in A \wedge b \in B \}}$$

Příklad:

Pro množiny **K = {a;b;c}**, **L = {1;2}** jsou kartézské součiny tohoto tvaru:

$$\mathbf{K \times L = \{ [a;1]; [a;2]; [b;1]; [b;2]; [c;1]; [c;2] \}}$$

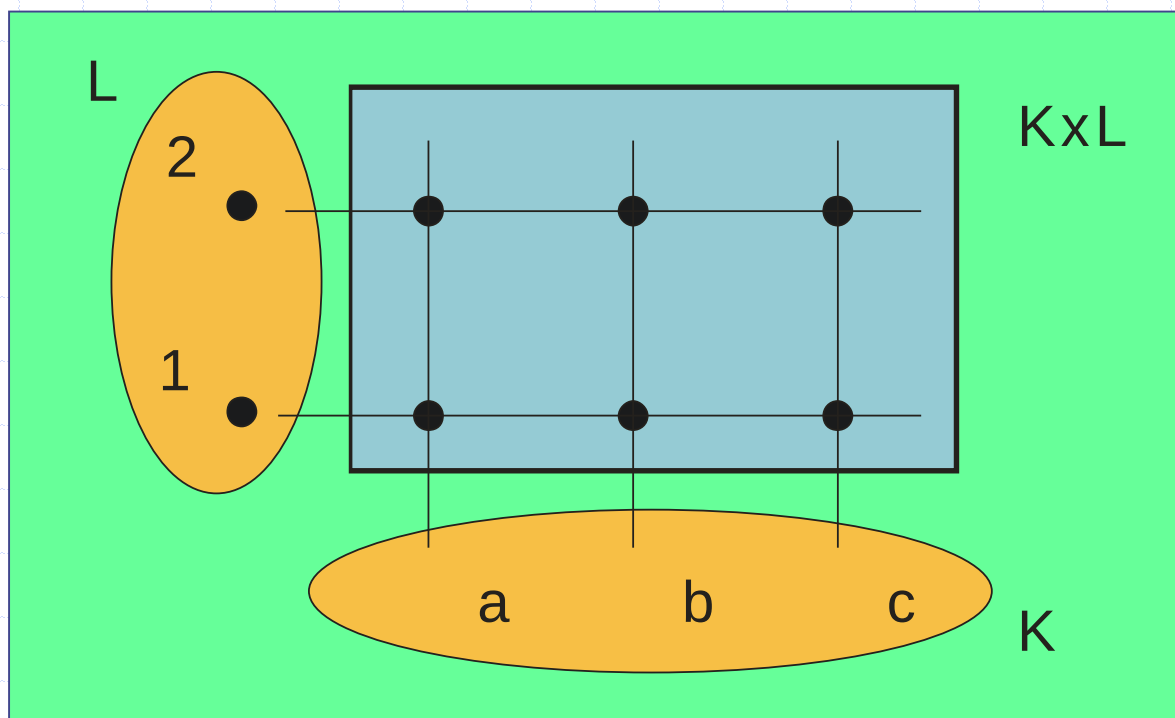
$$\mathbf{L \times K = \{ [1;a]; [1;b]; [1;c]; [2;a]; [2;b]; [2;c] \}}$$

Představa kartézského součinu

Z množin $K = \{a;b;c\}$, $L = \{1;2\}$

je vytvořen kartézský součin:

$$K \times L = \{ [a;1]; [a;2]; [b;1]; [b;2]; [c;1]; [c;2] \}$$



Vlastnosti kartézského součinu

$$A \times B \neq B \times A$$

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

$$K \times \emptyset = \emptyset \times K = \emptyset$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow K \times A \subseteq K \times B$$

Co je třeba znát a umět?

- Rozumět inkluzi množin a rovnosti množin,
- znát pojmy prázdná množina a univerzální třída,
- umět pracovat s průniky, sjednoceními a rozdíly množin,
- umět pracovat s doplňkem a potencí množiny,
- umět dokazovat věty o množinách,
- znát definici a vlastnosti kartézského součinu množin.

Děkuji za pozornost

