Axiomatická výstavba geometrie

1 Eukleidova formalizace planimetrie

2 Hilbertova axiomatizace planimetrie

2.1 Vlastnosti axiomatických systémů

2.2 Axiomy incidence

2.3 Axiomy uspořádání

2.4 Axiomy shodnosti

Definice
Nechť A, B jsou body, $A \neq B$. **Úsečka** AB je množina sestávající z bodů A, B a takových bodů X, že $A * X * B$. Body A, B jsou **koncové body úsečky**.

Definice
Nechť A, B jsou body, $A \neq B$. **Polopřímka** $\overrightarrow{AB}$ je množina bodů úsečky AB spolu s body X takovými, že $A * B * X$.

Definice
Dána je přímka p a body A, B neležící na přímce p. Říkáme, že body A, B **leží na stejné straně od přímky** p, pokud $A = B$ nebo pokud $A \neq B$ a úsečka AB neprotíná přímku p.

Definice
Pro přímku $p = \overleftrightarrow{AB}$ a bod C neležící na této přímce je **polorovina** $\overrightarrow{pC} = \overrightarrow{ABC}$ množina bodů X takových, že C a X leží na stejné straně od přímky p

(**vnitřní body poloroviny**) spolu s body přímky p (**hranice poloroviny**).

Definice

Nechť A, B, C jsou nekolineární body. Potom polopřímky $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ a $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ tvoří **úhel při vrcholu** B. Označujeme ho $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle(\vec{a},\vec{c})$, $\angle(\vec{c},\vec{a})$, případně také $\angle B$, pokud je z kontextu jasné, kterými polopřímkami je určen. Polopřímky $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ nazýváme **ramena úhlu**. **Vnitřek úhlu** (**vnitřní body úhlu**) $\angle ABC$ je průnik vnitřních bodů poloroviny $\overrightarrow{BCA}$ s vnitřními body poloroviny $\overrightarrow{BAC}$. **Vnějšek úhlu** (**vnější body úhlu**) $\angle ABC$ jsou všechny body roviny kromě polopřímek $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ a vnitřku úhlu $\angle ABC$.

Nedefinuje se konvexní úhel, nekonvexní úhel. Hovoří se o úhlu a jeho vnitřku či vnějšku.

Nedefinované pojmy:

shodnost úseček: $AB \simeq CD$ "úsečky AB a CD jsou shodné"
shodnost úhlů: $\angle ABC \simeq \angle DEF$ "úhly $\angle ABC$ a $\angle DEF$ jsou shodné"

Axiomy:

S1 Pro libovolné dva různé body A, B a polopřímku vycházející z bodu A' existuje na této polopřímce právě jeden bod B' takový, že $A'B' \simeq AB$.

S2 Jestliže $AB \simeq A'B'$ a $AB \simeq A''B''$, pak $A'B' \simeq A''B''$. Navíc, každá úsečka je shodná sama se sebou: $AB \simeq AB$.

S3 Jestliže $A*B*C$, $A'*B'*C'$, $AB \simeq A'B'$ a $BC \simeq B'C'$, pak $AC \simeq A'C'$.

S4 Pro daný úhel $\angle ABC$, danou polopřímku $\overrightarrow{B'A'}$ a danou polorovinu ohraničenou přímkou $\overleftrightarrow{A'B'}$ existuje právě jedna polopřímka $\overrightarrow{B'C'}$ v dané polorovině tak, že $\angle A'B'C' \simeq \angle ABC$.

S5 Jestliže $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$ a $\angle ABC \simeq \angle A''B''C''$, pak $\angle A'B'C' \simeq \angle A''B''C''$. Navíc, každý úhel je shodný sám se sebou: $\angle ABC \simeq \angle ABC$.

S6 Jestliže pro trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \simeq A'B'$, $BC \simeq B'C'$ a $\angle B \simeq \angle B'$, pak $\angle A \simeq \angle A'$ a $\angle C \simeq C'$.

2.5 Geometrie trojúhelníků

Definice
Říkáme, že trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ jsou **shodné**, označujeme $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$, pokud $AB \simeq A'B'$, $BC \simeq B'C'$, $AC \simeq A'C'$, $\angle A \simeq \angle A'$, $\angle B \simeq \angle B'$, $\angle C \simeq \angle C'$.

Věta (**sus**)
Jestliže pro trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \simeq A'B'$, $BC \simeq B'C'$ a $\angle B \simeq \angle B'$, pak jsou tyto trojúhelníky shodné.

Důkaz. [bude doplněn později]

Příklad
Uvažme algebraický model incidenční geometrie $\mathbb{R}^2$.

Pro $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ položme

$$A * B * C \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ B = (1-\lambda)A + \lambda C \ \wedge\ 0 < \lambda < 1$$

tedy $A * B * C$ právě tehdy, když B je vnitřní bod úsečky AC.

Lze dokázat, že $\mathbb{R}^2$ pak splňuje také axiomy uspořádání (zkuste do dokázat sami!).

Dále budeme v $\mathbb{R}^2$ měřit úhly a úsečky:

- Úhly budeme měřit obvyklým způsobem.
- Úsečky budeme měřit **manhattanskou metrikou**: Nechť $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Pak
$$|AB| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

Pak budeme definovat

$$\begin{aligned} AB \simeq A'B' &\iff |AB| = |A'B'| \\ \angle ABC \simeq \angle A'B'C' &\iff |\angle ABC| = |\angle A'B'C'| \end{aligned}$$

Lze ukázat, že $\mathbb{R}^2$ pak splňuje také S1, S2, S3, S4, S5 (zkuste to dokázat sami!).

Uvažme dva trojúhelníky:

- $\triangle ABC$, kde $A = (0, 2)$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$

- $\triangle A'B'C'$, kde $A' = (2, 0)$, $B' = (1, 1)$, $C' = (0, 0)$

Platí: $AB \simeq A'B'$ (protože $|AB| = |A'B'| = 2$), $BC \simeq B'C'$ (protože $|BC| = |B'C'| = 2$), $\angle B \simeq \angle B'$ (oba úhly jsou pravé).

Avšak $\neg(AC \simeq A'C')$, jelikož $|AC| = 4$, $|A'C'| = 2$. Takže trojúhelníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ nejsou shodné.

V teorii (geometrii) s axiomy incidence, uspořádání, S1, S2, S3, S4, S5 nelze dokázat větu sus. Takže axiom S6 je nezávislý na axiomech I1, I2, I3, U1, U2, U3, U4P, S1, S2, S3, S4, S5.

2.6 Axiom rovnoběžnosti

Axiom:

R Pro každou přímku p a pro každý bod B neležící na přímce p existuje nejvýše jedna přímka q procházející bodem B a rovnoběžná s přímkou p.

Poznámky

1. Existenci rovnoběžky lze dokázat z axiomů incidence, uspořádání a shodnosti.

2. Z axiomů incidence, uspořádání a shodnosti lze dokázat, že pátý Euklidův postulát a axiom R jsou ekvivalentní.

2.7 Axiom spojitosti

Axiom:

D (**Dedekindův axiom**) Nechť všechny body na přímce jsou rozděleny do dvou neprázdných disjunktních množin tak, že žádný bod z jedné množiny neleží mezi dvěma body z druhé množiny. Pak na této přímce existuje právě jeden bod B takový, že jedna z daných množin je polopřímka se začátkem v bodě B a druhá množina je jejím doplňkem.

Nechť P je množina všech bodů přímky, $P = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$. Zakázaná je tato situace:

$$X * Y * Z,\ X, Z \in M_i,\ Y \in M_j,\ i \neq j$$

2.8 Absolutní geometrie

Geometrie, kterou je možné popsat axiomy incidence, uspořádání, shodnosti a spojitosti, se nazývá **absolutní geometrie**. Tato geometrie je tedy nezávislá na axiomu rovnoběžnosti.

2.9 Euklidovská geometrie

Pokud k absolutní geometrii přidáme axiom R, dostaneme **euklidovskou geometrii**.

2.10 Lobačevského (hyperbolická) geometrie

Pokud k absolutní geometrii přidáme místo axiomu R axiom L, dostaneme **Lobačevského (hyperbolickou) geometrii**.
Axiom:

L Pro každou přímku p a každý bod B neležící na přímce p existují aspoň dvě přímky q_1, q_2, $q_1 \neq q_2$, procházející bodem B a rovnoběžné s přímkou p.

V Lobačevského geometrii lze například dokázat, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než dva úhly pravé. (V absolutní geometrii lze dokázat, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku není větší než dva úhly pravé.)

3 Tarského axiomatizace geometrie

Alfred Tarski (1901 – 1983), narozen ve Varšavě, zemřel v Berkeley, polský logik a matematik.

Na rozdíl od jiných systémů geometrie (jako je například Hilbertův systém), v nichž body, přímky, roviny, atd., jsou všechno primitivní (nedefinované) "geometrické objekty", v Tarského systému je pouze jeden typ primitivního geometrického objektu: body. Jinými slovy, všechny proměnné $x, y, z, \ldots$ označují body.

Existují pouze dva primitivní geometrické (tj. ne-logické) pojmy: ternární relace B "mezi" a kvaternární relace D "ekvidistance".

- $B(xyz)$ intuitivně znamená, že bod y leží na úsečce spojující x a z (tj. případy y je x a y je z nejsou vyloučeny)

- $D(xyuv)$ intuitivně znamená, že vzdálenost x od y je stejná jako vzdálenost u od v.

Logickými symboly jazyka jsou

- rovnost $=$
- výrokové spojky konjunkce, disjunkce, negace, implikace, ekvivalence $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- univerzální kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$

Systém má dvanáct axiomů A1 – A12 a soubor elementárních axiomů spojitosti A13.

A1 $\forall x \forall y [B(xyx) \rightarrow (x = y)]$

A2 $\forall x \forall y \forall z \forall u [B(xyu) \wedge B(yzu) \rightarrow B(xyz)]$

A3 $\forall x \forall y \forall z \forall u [B(xyz) \wedge B(xyu) \wedge (x \neq y) \rightarrow B(xzu) \vee B(xuz)]$

A4 $\forall x \forall y [D(xyyx)]$

A5 $\forall x \forall y \forall z [D(xyzz) \rightarrow (x = y)]$

A6 $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [D(xyzu) \wedge D(xyvw) \rightarrow D(zuvw)]$

A7 $\forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v [B(xtu) \wedge B(yuz) \rightarrow B(xvy) \wedge B(ztv)]$

A8 $\forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v \exists w [B(xut) \wedge B(yuz) \wedge (x \neq u) \rightarrow B(xzv) \wedge B(xyw) \wedge B(vtw)]$

A9 $\forall x \forall x' \forall y \forall y' \forall z \forall z' \forall u \forall u' [D(xyx'y') \wedge D(yzy'z') \wedge D(xux'u') \wedge D(yuy'u') \wedge B(xyz) \wedge B(x'y'z') \wedge (x \neq y) \rightarrow D(zuz'u')]$

A10 $\forall x \forall y \forall u \forall v \exists z [B(xyz) \wedge D(yzuv)]$

A11 $\exists x \exists y \exists z [\neg B(xyz) \wedge \neg B(yzx) \wedge \neg B(zxy)]$

A12 $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v [D(xuxv) \wedge D(yuyv) \wedge D(zuzv) \wedge (u \neq v) \rightarrow B(xyz) \vee B(yzx) \vee B(zxy)]$

A13 Nechť φ je formule, která neobsahuje žádný volný výskyt proměnných y, z, u, a ψ je formule, která neobsahuje žádný volný výskyt proměnných x, z, u. Pak je axiomem univerzální uzávěr formule

$$\exists z \forall x \forall y[\varphi \wedge \psi \rightarrow B(zxy)] \rightarrow \exists u \forall x \forall y[\varphi \wedge \psi \rightarrow B(xuy)]$$