

Algebra I – úlohy k procvičení – 7.10.2020

1. Nechť S je neprázdná množina. Na množině S je dána binární operace $*$, která splňuje následující podmínky:

- (a) pro všechna $a, b \in S$ je $a * b = a$
- (b) pro všechna $a, b \in S$ je $a * b = b * a$

Dokažte, že množina S je jednoprvková.

2. Uveďte příklady binárních operací $*$, $\circ$, $\square$, $\triangle$ na množině $\mathbb{Z}$ (množina všech celých čísel) tak, aby platilo:

- (a) operace $*$ je asociativní a je komutativní
- (b) operace $\circ$ je asociativní a není komutativní
- (c) operace $\square$ není asociativní a je komutativní
- (d) operace $\triangle$ není asociativní a není komutativní

3. Na množině $\mathbb{R}^+$ (množina všech kladných reálných čísel) jsou definovány binární operace $\square$ a $*$ takto: pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ je

$$x \square y = \sqrt{xy}, \quad x * y = \frac{x + y}{2}$$

Rozhodněte, zda operace $\square$ je distributivní vzhledem k operaci $*$. Rozhodnutí zdůvodněte.

4. Na množině $\mathbb{Z}$ je definována binární operace $*$ takto:

$$a * b = a + b + ab$$

(pro $a, b \in \mathbb{Z}$)

Rozhodněte, zda $\mathbb{Z}$ s operací $*$ je grupa. Rozhodnutí zdůvodněte.

5. Jestliže G je grupa, ve které $a^2 = 1$ pro všechna $a \in G$, pak G je komutativní grupa. Dokažte. (Používáme zde multiplikativní symboliku, takže 1 značí neutrální prvek grupy G .)