Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

28.2.2024

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Grafické řešení maticové hry 2 x n

Nyní předpokládejme výplatní matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Hledáme optimální smíšené strategie

$$\mathbf{x}^0 = (x_1, x_2), \mathbf{y}^0 = (y_1, y_2, \dots y_n),$$

za podmínky

$$x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$$

Uvažujme n funkcí

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Znázorníme graficky části těchto přímek v intervalu $x_1 \in \langle 0, 1 \rangle$.

Grafické řešení maticové hry 2 x n

Cílem druhého hráče je minimalizovat výhru prvního hráče. Určíme proto funkci

$$M(x_1) = \min_j M_j(x_1).$$

Cílem prvního hráče je vhodnou volbou hodnoty x_1 maximalizovat svoji výhru. Hledáme tedy hodnotu x_1^0 takovou, že

$$M(x_1^0) = \max_{x_1} M(x_1).$$

Řešením hry je pak

$$v = M(x_1^0), \mathbf{x}^0 = (x_1^0, 1 - x_1^0)$$

V optimální smíšené strategii druhého hráče jsou nenulové hodnoty y_k, y_l, které odpovídají přímkám $M_k(x_1), M_l(x_1)$ protínajícím se v bodě (x_1^0, v). Hodnoty y_k, y_l určíme řešením maticové hry s výplatní maticí typu 2x2

$$\begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ a_{2k} & a_{2l} \end{pmatrix}$$

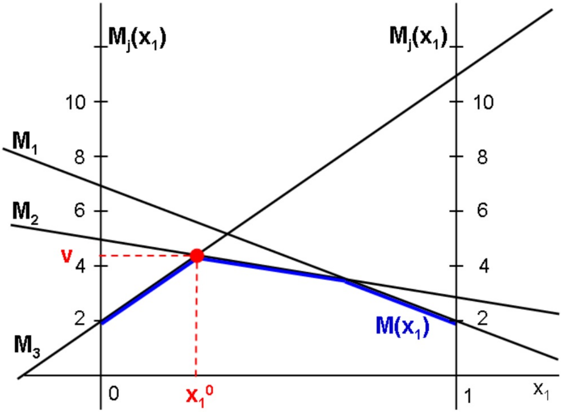
Grafické řešení maticové hry 2 x n - příklad

Budeme řešit maticovou hru s výplatní maticí.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Uvažujeme funkce, které znázorníme do grafu

$$\begin{aligned} M_1(x_1) &= 2x_1 + 7x_2 = -5x_1 + 7 \\ M_2(x_1) &= 3x_1 + 5x_2 = -2x_1 + 5 \\ M_3(x_1) &= 11x_1 + 2x_2 = 9x_1 + 2 \end{aligned}$$



Obrázek: Grafické řešení

Grafické řešení maticové hry 2 x n - příklad

Funkce $M(x_1)$ je zřejmá z grafu. Maximum funkce $M(x_1)$ nabývá na průsečíku přímek $M_2 \bigcap M_3$. Proto $y_1 = 0$. Ostatní složky určíme řešením maticové hry s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 3 + 2 - 11 - 5 = -11$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 3.2 - 11.5 = -49$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a} = \frac{2-5}{-11} = \frac{3}{11}, x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a} = \frac{3-11}{-11} = \frac{8}{11}$$

$$y_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a} = \frac{2-11}{-11} = \frac{9}{11}, y_3 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a} = \frac{3-5}{-11} = \frac{2}{11}$$

$$v = \frac{-49}{-11} = \frac{49}{11}$$

Grafické řešení maticové hry 2xn - příklad

Tedy

$$\mathbf{x}^{0\,T} = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

$$\mathbf{y}^{0\,T} = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$$

$$v = \frac{49}{11}$$

Grafické řešení maticové hry mx2

- obdobným postupem z pohledu druhého hráče se dá řešit rovněž maticová hra mx2, to zde probírat nebudeme, ale ukážeme si, jak jednoduše převést hru mx2 na hru 2xn.
- budeme uvažovat, že první hráč je druhý a naopak
- matici transformujeme a změníme znaménko u všech prvků, protože výplatní matice je nyní vztahována k druhému hráči.
- tedy nová matice 2x n bude vypadat

$$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}^T$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

- pokud je maticová hra typu 2xn, případně mx2 (kdy lze snadno převést na typ 2xn), můžeme hledat rovnovážné řešení graficky
- v obecném případně mxn lze využít k hledání rovnovážných smíšených strategií lineární programování

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Hledáme Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Uvedené nerovnosti musí platit i pro ryzí strategie

$$\mathbf{x}^T = (1,0,\ldots,0), \mathbf{x}^T = (0,1,\ldots,0), \ldots, \mathbf{x}^T = (0,0,\ldots,1)$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq v$$

$$a_{11}y_1^0 + a_{12}y_2^0 + \ldots + a_{1n}y_n^0 \leq v$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}y_1^0 + a_{m2}y_2^0 + \ldots + a_{mn}y_n^0 \leq v$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Pokud $v > 0$, můžeme všechny rovnice vydělit výrazem v. Provedeme substituci $q_j = \frac{y_j^0}{v}$, $q_j \geq 0$ a získáme lineární soustavu nerovnic.

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq 1$$

$$q_j \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Obdobně musí platit $\mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}$ i pro ryzí strategie

$$\mathbf{y}^T = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{y}^T = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{y}^T = (0, 0, \dots, 1)$$

$$v \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

$$a_{11}x_1^0 + a_{21}x_2^0 + \ldots + a_{m1}x_m^0 \geq v$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}x_1^0 + a_{2n}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_m^0 \geq v$$

Pokud je $v > 0$, můžeme všechny rovnice vydělit výrazem v. Provedeme substituci $p_i = \frac{x_i^0}{v}$, $p_i \geq 0$ a získáme lineární soustavu nerovnic.

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \leq 1$$

$$p_i \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

K omezujícím podmínkám zbývá doplnit účelové funkce.
Platí:

$$1 = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 = v. \sum_{i=1}^{m} p_i$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{v}$$

První hráč chce maximalizovat cenu hry v, což znamená totéž jako minimalizovat převrácenou hodnotu:

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Obdobně platí:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^0 = v . \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{v}$$

Druhý hráč chce naopak minimalizovat cenu hry v, což znamená totéž jako maximalizovat převrácenou hodnotu:

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Nyní můžeme odvození shrnout do následujících vět.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Věta

Uvažujme maticovou hru s výplatní maticí $\mathbf{A}$ a prostory stategií X, Y. Pak vyřešením úlohy lineárního programování

$$\max\{v : \mathbf{A}^T\mathbf{x} - \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq 0, v \in \mathbb{R}\}$$

určíme cenu hry a nalezneme optimální strategii prvního hráče. Vyřešením úlohy lineárního programování

$$\min\{v : \mathbf{A}\mathbf{y} - \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq 0, v \in \mathbb{R}\}$$

určíme cenu hry a nalezneme optimální strategii druhého hráče.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

- Uvedená věta se obecně vztahuje na libovolnou maticovou hru.
- Vzhledem k tomu, že jsme již dospěli k závěru, že každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích, vyplývá z toho, že předchozí formulované úlohy mají vždy optimální řešení.
- Optimální řešení nemusí být jediné, může existovat více možných řešení.
- Pro zjednodušení výpočtů se budeme zaměřovat na specifický tvar úlohy lineárního programování.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Věta

Uvažujme maticovou hru s výplatní maticí $\mathbf{A}$ a prostory stategií X, Y, která má kladnou cenu v. Když $\mathbf{p}^0$ je optimálním řešením úlohy

$$\min\{\sum_{i=1}^{m} p_i : \mathbf{A}^T\mathbf{p} \geq \mathbf{1}, \mathbf{p} \geq 0\},$$

pak hra má cenu

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}$$

a optimální strategie prvního hráče je

$$\left(\frac{p_1^0}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}, \frac{p_2^0}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}, \dots, \frac{p_n^0}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}\right).$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

A když $\mathbf{q}^0$ je optimálním řešením úlohy

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} q_i : \mathbf{Aq} \leq \mathbf{1}, \mathbf{q} \geq 0\},$$

pak hra má cenu

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}$$

a optimální strategie druhého hráče je

$$\left(\frac{q_1^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, \frac{q_2^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, \ldots, \frac{q_n^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}\right).$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

- Podmínkou pro tuto verzi je kladná cena hry.
- Cenu hry můžeme odhadnout, najdeme opět maxima ve sloupcích a minima v řádcích.
- Pokud se maximin a minimax shodují, jedná se o řešení v ryzích strategiích.
- Pokud se neshodují, hra nemá rovnovážné řešení v ryzích strategiích, ale víme, že cena hry se nachází mezi danými hodnotami.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Uvažujme výplatní matici

$$\begin{array}{cccl} 1 & -1 & 2 & \ldots\text{minimum -1} \\ 0 & 2 & 1 & \ldots\text{minimum 0} \\ -1 & -2 & 1 & \ldots\text{minimum -2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \text{maximum 1} & \text{maximum 2} & \text{maximum 2} & \end{array}$$

Tedy minimax 1, maximin 0, cena hry je někde mezi 0 a 1, nulová cena hry není vyloučená.

V takovém případě můžeme ke každému prvku matice přičíst kladné číslo c, čímž získáme strategicky ekvivalentní hru. Rovnovážné strategie se nezmění, cena hry se zvýší o c.

Příklad strategicky ekvivalentní hry

Uvažujme výplatní matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Strategicky ekvivalentní hru vytvoříme přičtením 1 k matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nová matice bude mít cenu hry v intervalu $[1, 2]$, tedy kladnou.

Poznámka: Pokud k matici přičteme takové číslo c, že každý prvek $a_{ij} + c > 0$, pak je zajištěno, že nová cena hry $v + c > 0$.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - shrnutí

Označíme si $b_{ij} = a_{ij} + c$, $p_i = \frac{x_i}{v+c}$, $p_i \geq 0$. Pak maticovou hru tedy můžeme vyřešit pomocí úloh lineárního programování.
Pro prvního hráče:

$$\min p_1 + p_2 + \ldots + p_m$$

za podmínek

$$b_{11}p_1 + b_{21}p_2 + \ldots + b_{m1}p_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$b_{1n}p_1 + b_{2n}p_2 + \ldots + b_{mn}p_m \geq 1$$

$$p_i \geq 0; i = 1, 2, \ldots, m$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - shrnutí

A pro druhého hráče označíme $q_i = \frac{y_i}{v+c}$, $q_i \geq 0$ a řešíme úlohu:

$$\max q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

za podmínek

$$b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + \ldots + b_{1n}q_n \leq 1$$

$$\vdots$$

$$b_{m1}q_1 + b_{m2}q_2 + \ldots + b_{mn}q_n \leq 1$$

$$q_i \geq 0; i = 1, 2, \ldots, n$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - shrnutí

- Uvedené úlohy jsou duálně sdružené.
- Úloha pro prvního hráče je duální problém, zatímco úloha pro druhého hráče je primární problém.
- Řešením jakékoli ze dvou úloh získáme řešení obou úloh $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$ a z hodnoty účelové funkce zjistíme v.
- Z výpočetního hlediska je výhodnější řešit maximalizační úlohu s proměnnými q_i.
- Ukážeme si řešení pomocí simplexové tabulky, ale řešení lze nalézt i bez znalosti simplexové metody, např. s pomocí řešitele v MS Excel.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\max q_1 + q_2 + q_3$$

$$\begin{aligned} 2q_1 + 3q_3 &\leq 1 \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 &\leq 1 \\ -q_2 + 2q_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\min p_1 + p_2 + p_3$$

$$\begin{aligned} 2p_1 + p_2 &\geq 1 \\ 3p_2 - p_3 &\geq 1 \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování - řešení příkladu

$$\mathbf{q}^T = (\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; 0)$$

$$\mathbf{p}^T = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$$

$$z = \frac{2}{3}$$

Po substituci

$$\mathbf{y}^{0T} = \frac{3}{2}.\mathbf{q}^T = (\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0)$$

$$\mathbf{x}^{0T} = \frac{3}{2}.\mathbf{p}^T = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$$

$$v = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$