

Algebra I – úlohy k procvičení – 4.11.2020

1. Nechť G je konečná grupa, H a K jsou normální podgrupy grupy G . Jestliže $G = H \cdot K$ a $|G| = |H| \cdot |K|$, pak $G \cong H \times K$. Dokažte.
Připomínka: Jestliže A je konečná množina, pak $|A|$ značí počet prvků množiny A .

2. Nechť A, B jsou podgrupy grupy G . Dokažte:

$A \cup B$ je podgrupa grupy G právě tehdy, když $A \subseteq B$ nebo $B \subseteq A$

3. Nechť G je grupa, $T = \{(g, g) \mid g \in G\}$.

(a) Dokažte, že T je podgrupa grupy $G \times G$.

(b) Dokažte, že $T \cong G$.

(c) Dokažte:

podgrupa T je normální právě tehdy, když grupa G je komutativní

4. Nechť G je konečná grupa řádu n , kde n je sudé celé číslo. Dokažte, že grupa G obsahuje aspoň jeden prvek řádu 2.
5. Nechť I je konečný obor integrity s jednotkovým prvkem. Nechť I má aspoň dva prvky. Dokažte, že I je těleso.