UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Základy matematiky KMA/ZAM
Teoretické základy informatiky I KI/TZI1

Přednáška 06
Binární relace

jiri.cihlar@ujep.cz

O čem budeme hovořit:

- Příklady relací, definice binární relace
- Grafy binárních relací
- Doplňková, inverzní a složená relace
- Vlastnosti binárních relací

Definice binární relace
Grafy relací

Příklady binárních relací

Příklady relací mezi čísly:

$\mathbf{a} < \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$, atd.

Příklady relací z teorie množin:

$\mathbf{a} \in \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \supset \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, atd.

Příklady relací z geometrie:

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, atd.

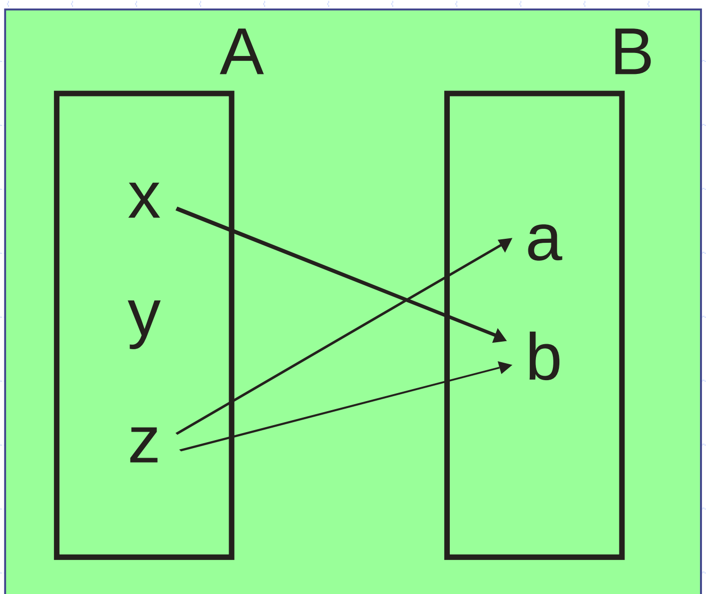
Příklady relací z logiky:

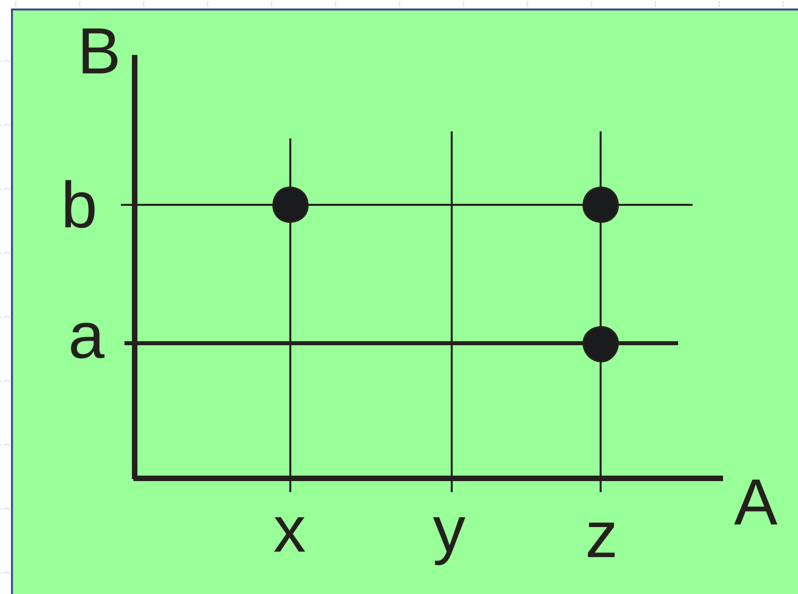
$\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$, atd.

Binární relace v množinách A, B

Definice: **Množinu R nazýváme binární relací v množinách A, B právě tehdy, když $R \subseteq A \times B$.**

Binární relace znázorňujeme spojnicovými nebo kartézskými grafy.





Úmluvy o zápisech

Jestliže platí x R y , zapisujeme to [x ; y] $\in$ R .

Příklady:

Protože platí **2** < **3** , zapisujeme to [**2** ; **3**] $\in$ < .

Protože platí **5** ≤ **5** , zapisujeme to [**5** ; **5**] $\in$ ≤ .

Protože platí **3** | **9** , zapisujeme to [**3** ; **9**] $\in$ | .

Protože neplatí **8** < **3** , zapisujeme to [**8** ; **3**] $\notin$ < .

Protože neplatí **4** | **7** , zapisujeme to [**4** ; **7**] $\notin$ | .

První a druhý obor relace R

Definice: Nechť je dána relace $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

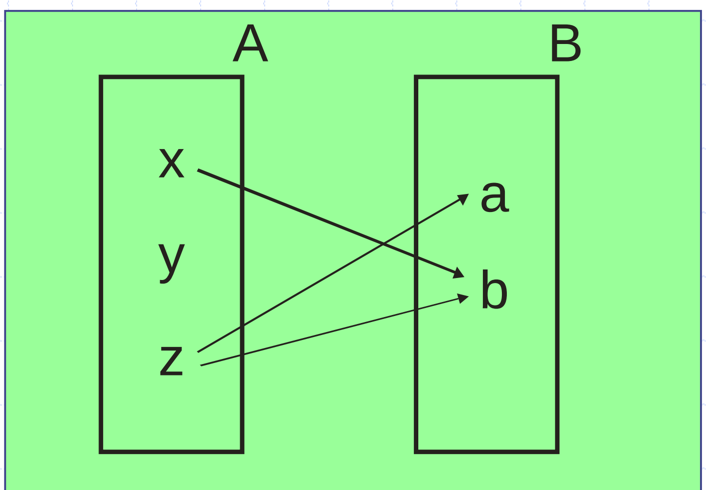
Prvním oborem relace R nazýváme množinu

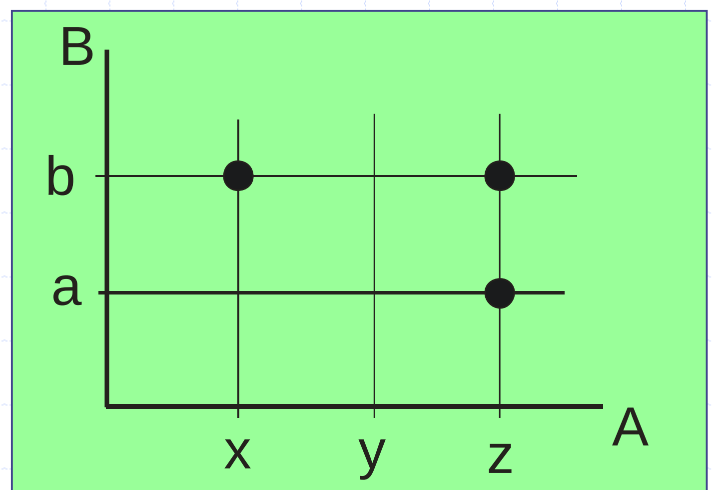
$$■\mathbf{R} = \{x \in A\ ;\ (\exists y \in B)\ x\ R\ y\}\ ,$$

druhým oborem relace R nazýváme množinu

$$\mathbf{R}■ = \{y \in B\ ;\ (\exists x \in A)\ x\ R\ y\}\ .$$

Jak určíme oba obory z grafů relace **R** ?





Doplňková, inverzní a složená relace

Inverzní relace R^{-1} k relaci R

Definice:

$x\ R^{-1}\ y$ platí právě tehdy, když $y\ R\ x$.

Tedy $[x\ ;\ y] \in R^{-1}$ právě tehdy, když $[y\ ;\ x] \in R$.

Z toho plyne, že je-li $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, pak $\mathbf{R}^{-1} \subseteq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Příklady:

Binární relace $>$ je inverzní k binární relaci $<$.

Binární relace **„být dělitelem“** je inverzní k binární relaci **„být násobkem“** .

Jak vypadají grafy inverzní relace?

Doplňková relace –R k relaci R

Definice:

x (–R) y platí právě tehdy, když neplatí x R y .

Tedy [x ; y] $\in$ (–R) právě tehdy, když [x ; y] $\notin$ R .

Příklad:

Binární relace $\leq$ je doplňková k binární relaci $>$.

Jak vypadají grafy doplňkové relace?

Relace složená z dvou relací R a S

Definice:

Nechť jsou dány relace R a S.

x R∘S y platí právě tehdy, když (∃z) x R z ∧ z S y.

Příklad:

Binární relace **„být babičkou z otcovy strany“** je složená relace z binárních relací **„být matkou“** a **„být otcem“** .

Jak zkonstruovat grafy složené relace?

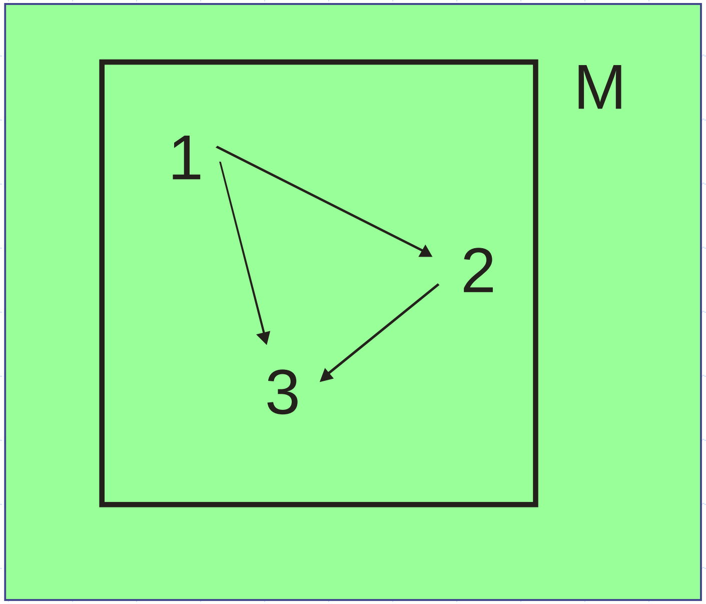
Vlastnosti binárních relací

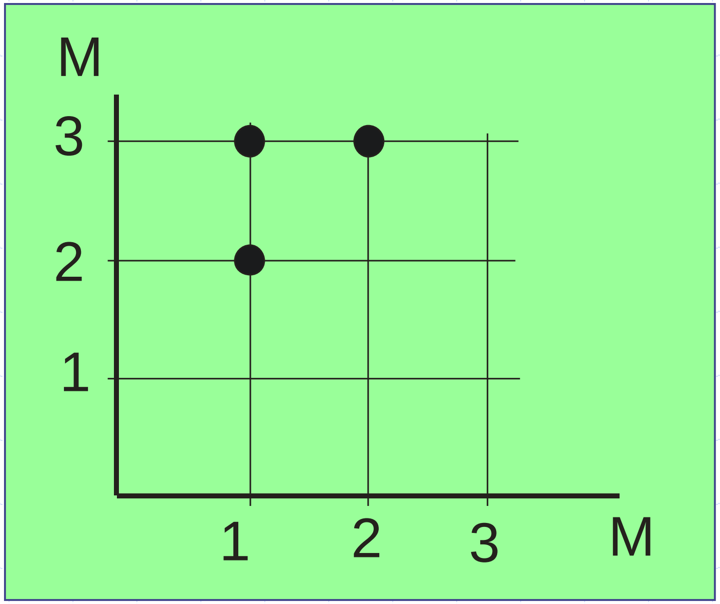
Binární relace v množině M

Definice: **Množinu R nazýváme binární relací v množině M právě tehdy, když $R \subseteq M \times M$.**

Příklad: Uvažujme množinu $M = \{1; 2; 3\}$ a relaci $<$ v M.

Pak $< \; = \{ [1;2] , [1;3] , [2;3] \}$





Reflexivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **reflexivní** právě tehdy, když platí

$(\forall x \in M)\ x\ R\ x$.

Příklady: $=$ je reflexivní v **N**, $\mid$ je reflexivní v **N**

- Co znamená, že relace není reflexivní?
- Jak se projeví reflexivita relace v jejích grafech?
- Co můžeme říci o prvním i druhém oboru reflexivní relace?

Antireflexivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **antireflexivní** právě tehdy, když platí

$(\forall x \in M)\ \neg\, x\, R\, x$.

Příklad: < je antireflexivní v **N**

- Co znamená, že relace není antireflexivní?
- Jak se projeví antireflexivita relace v grafech?
- Co můžeme říci o doplňkové relaci reflexivní relace?
- Existují relace, které nejsou ani reflexivní ani antireflexivní?

Symetričnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **symetrická** právě tehdy, když platí

$(\forall x,y \in M)\ \ x\,R\,y \rightarrow y\,R\,x$.

Příklady: $=$ je symetrická v **N**, $|$ není symetrická v **N**

- Co znamená, že relace není symetrická?
- Jak se projeví symetričnost relace v jejích grafech?
- Co můžeme říci o doplňkové relaci symetrické relace?

Antisymetričnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **antisymetrická** právě tehdy, když platí

$$(\forall x,y \in M)\ \ x \neq y \wedge x\, R\, y \rightarrow \neg\, y\, R\, x\ .$$

Příklady: $\mid$ je antisymetrická v **N**

- Co znamená, že relace není antisymetrická?
- Jak se projeví antisymetričnost relace v jejích grafech?
- Existuje relace, která je symetrická a současně i antisymetrická?

Ekvivalentní vyjádření antisymetričnosti

Formulace z definice:

$$x \neq y \land x\,R\,y \rightarrow \neg\, y\,R\,x\,.$$

Ekvivalentní formulace:

$$\neg\,(x \neq y \land x\,R\,y) \lor \neg\, y\,R\,x$$

$$x = y \lor \neg\, x\,R\,y \lor \neg\, y\,R\,x$$

$$(\neg\, x\,R\,y \lor \neg\, y\,R\,x) \lor x = y$$

$$\neg\,(x\,R\,y \land y\,R\,x) \lor x = y$$

$$\boxed{x\,R\,y \land y\,R\,x \rightarrow x = y}$$

Tranzitivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **tranzitivní** právě tehdy, když platí

$$(\forall x,y,z \in M)\ \ x\,R\,y \wedge y\,R\,z \rightarrow\ x\,R\,z\,.$$

Příklady: $=$ je tranzitivní v N , $<$ je tranzitivní v N ,
$|$ je tranzitivní v N , $\neq$ není tranzitivní v N

- Co znamená, že relace není tranzitivní?
- Jak se projeví tranzitivnost relace v jejím spojnicovém grafu?
- Jsou relace $R = \emptyset$ a $R = M \times M$ tranzitivní v **M** ?

Konektivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **konektivní** právě tehdy, když platí

$$(\forall x,y\in M)\ \ x \neq y \rightarrow x\,R\,y \vee y\,R\,x\,.$$

Příklady: $<$ je konektivní v **N** , $\mid$ není konektivní v **N**

- Co znamená, že relace není konektivní?
- Jak se projeví konektivnost relace v jejích grafech?
- Existuje relace, která je reflexivní a současně není konektivní?

Ekvivalentní vyjádření konektivnosti

Formulace z definice:

$$x \neq y \rightarrow x\, R\, y \vee y\, R\, x\,.$$

Ekvivalentní formulace:

$$\neg\,(x\, R\, y \vee y\, R\, x) \rightarrow x = y$$

$$\boxed{\neg\, x\, R\, y \wedge \neg\, y\, R\, x \rightarrow x = y}$$

Úloha

Vyšetřete vlastnosti relace **R**, jejíž spojnicový graf je na obrázku:

R není reflexivní

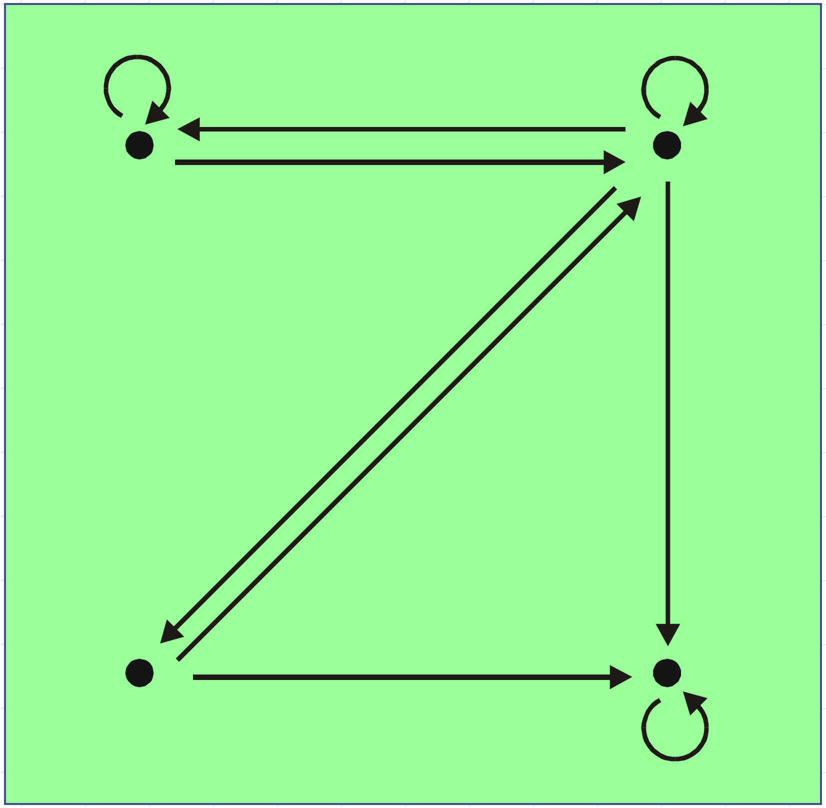
R není antireflexivní

R není symetrická

R není antisymetrická

R není tranzitivní

R není konektivní



Co je třeba znát a umět?

- Znát příklady binárních relací z různých částí matematiky,
- umět pracovat se spojnicovým i kartézským grafem relací,
- znát pojmy první a druhý obor relace,
- rozumět pojmům inverzní, doplňkové a složené relace,
- umět vyšetřovat vlastnosti binárních relací (reflexivita, antireflexivita, symetričnost, antisymetričnost, tranzitivita a konektivita).

Děkuji za pozornost