0.1 Optimalizační úlohy

Množství reálných rozhodovacích situací je možné modelovat jako úlohu **matematického programování**, kterou lze obecně formulovat následovně:

maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde n je počet proměnných modelu, m je počet jeho omezujících podmínek a $\mathrm{f}(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ jsou obecné funkce n proměnných. Z matematického hlediska se tedy jedná o určení hodnot proměnných modelu x_i tak, aby byly respektovány všechny omezující podmínky úlohy a aby byl dosažen extrém účelové (kriteriální) funkce $\mathrm{f}(x)$. Jsou-li všechny funkce $\mathrm{f}(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ve výše uvedené formulaci funkcemi lineárními, mluvíme o úloze **lineárního programování** (LP), v opačném případě, tedy když je alespoň jedna funkce nelineární, o úloze **nelineárního programování**. Řešení lineárních optimalizačních úloh je výrazně snazší než v případě úloh nelineárních. Tomu odpovídá i množství aplikací, které používají lineární modely.

0.2 Model lineárního programování

Při aplikaci lineárních optimalizačních modelů při řešení reálných problémů lze rozlišit několik základních fází:

1. **Identifikace problému v reálném systému**
   Rozpoznat problém v reálném systému (např. ve firmě) je záležitostí managementu případně konzultačních pracovníků, kteří se podílejí na její analýze. Na této fázi se zpravidla nepodílí přímo odborník na matematické modelování a optimalizaci. Ten by se měl účastnit především dalších fází.

2. **Sestavení ekonomického modelu daného problému**
   Ekonomický model popisuje vybrané prvky analyzovaného systému a vztahy mezi nimi. Jedná se hlavně o ty prvky, které se vztahují ke zkoumanému problému. Musí se však jednat o podstatné stránky systému ve vztahu k cílům analýzy daného rozhodovacího problému. Ekonomický model přitom obsahuje čtyři hlavní části:

   - cíl analýzy (optimalizace),
   - popis procesů, které v systému probíhají; intenzita realizace těchto procesů ovlivňuje sledovaný cíl optimalizace,
   - popis činitelů, které ovlivňují provádění procesů (procesy nemohou probíhat neomezeně, ale jejich intenzita realizace je limitována celou řadou činitelů),
   - ekonomický model musí v neposlední řadě obsahovat popis vztahů mezi výše uvedenými prvky – cílem, procesy a činiteli.

3. **Sestavení matematického modelu**
   Matematický model úlohy lineárního programování (LP) má stejnou strukturu jako model ekonomický:

   - cíl optimalizace je v úlohách LP matematicky vyjádřen lineární účelovou (kriteriální) funkcí,
   - procesům odpovídají v matematickém modelu proměnné modelu a intenzitu realizace procesů vyjadřují hodnoty proměnných – protože intenzita realizace procesů nemůže být v typickém případě záporná, je matematický model úlohy LP doplněný o tzv. podmínky nezápornosti,
   - činitelům odpovídají v matematickém modelu omezující podmínky, které jsou vyjádřeny ve formě lineárních rovnic nebo nerovnic,
   - vztah mezi činiteli a procesy je v matematickém modelu přitom vyjádřen strukturními koeficienty.

   Obecná podoba matematického modelu úlohy lineárního programování je tedy následující:

maximalizovat (minimalizovat)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

za podmínek

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_j &\geq 0. \end{aligned}$$

kde

- n je počet strukturních proměnných modelu,
- m je počet omezujících podmínek,
- $c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ je řádkový vektor cenových koeficientů (cen) modelu,
- $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ je sloupcový vektor hodnot pravých stran modelu,
- $A = (a_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ je matice strukturních koeficientů modelu.

V souladu s uvedeným značením je možné matematický model úlohy LP zapsat i následovně pomocí sumací:

maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, &\quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0, &\quad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

nebo maticový zápis:

maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x},$$

za podmínek

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Uvedené formulace matematického modelu mohou být dále doplněny o další speciální podmínky. Například poměrně častý je požadavek, aby hodnoty proměnných byly v celých číslech. V takovém případě se potom mluví o úlohách celočíselného (lineárního) programování.

0.3 Simplexová metoda

Simplexová metoda je iterační algoritmus pro efektivní prohledávání základních (bazických) řešení úlohy lineárního programování (LP) a pro určení optimálního řešení této úlohy nebo konstatování, že takové řešení neexistuje (ať už z jakéhokoliv důvodu). Cílem této kapitoly není detailní popis simplexové metody. Zaměříme se spíše na její základy, které jsou nezbytné pro pochopení modifikací základního simplexového algoritmu, kterými se budeme zabývat v následující kapitole. Celý algoritmus budeme ilustrovat na příkladu: maximalizovat (minimalizovat)

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6000, \\ x_1 + x_2 &\leq 2600, \\ x_1 &\leq 1800, \\ x_1, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

0.3.1 Výchozí základní řešení úlohy LP

Omezující podmínky v úloze LP jsou většinou zadané ve formě rovnic a/nebo nerovnic. Nerovnice převedeme na rovnice pomocí *přídavných proměnných*, které se od levé strany nerovnic typu „$\leq$“ odečítají a k levé straně nerovnic typu „$\geq$“ přičítají. Získáme tím tzv. *ekvivalentní soustavu rovnic*, která má pro náš ilustrační příklad následující tvar:

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 6000, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_4 & = 2600, \\ x_1 & & & + & x_5 & = 1800, \end{array}$$

kde x_3, x_4 a x_5 jsou přídavné proměnné.

Takto získaná ekvivalentní soustava rovnic může být již přímo v tzv. *kanonickém tvaru*, tj. ve tvaru, kdy matice strukturních koeficientů obsahuje jednotkovou matici. To je i případ našeho příkladu, kde je jednotková matice tvořena sloupci strukturních koeficientů u proměnných x_3, x_4 a x_5. V kanonickém tvaru jsou dva druhy proměnných – ty proměnné, u kterých jsou jednotkové vektory, se označují jako *základní (bazické)* proměnné, ostatní jsou *nezákladní (nebazické)*. Každému kanonickému tvaru ekvivalentní soustavy rovnic odpovídá základní řešení úlohy LP, které se snadno získá tak, že se nezákladní proměnné položí rovny nule a základní proměnné se rovnají hodnotám na pravých stranách. Výchozí základní řešení v naší úloze je tedy

$$\mathbf{x}^{\mathrm{I}} = (0, 0, 6000, 2600, 1800).$$

Po doplnění přídavných proměnných je ekvivalentní soustava rovnic v kanonickém tvaru pouze tehdy, pokud jsou v omezujících podmínkách všechny nerovnice typu „$\leq$“, což není příliš časté. V takovém případě je nutné doplnit chybějící jednotkové vektory pro získání kanonického tvaru pomocí tzv. *pomocných proměnných*, které se přičítají ke každé omezující podmínce typu „$\geq$“ a „$=$“. Získáme tak tzv. *rozšířenou soustavu rovnic*, jejíž základní řešení není ovšem přípustným řešením původní úlohy. Pomocné proměnné totiž vyjadřují míru nepřípustnosti aktuálního řešení. Pokud mají kladnou hodnotu, řešení dané úlohy není přípustné. Pro získání přípustného řešení a tedy i výchozího základního řešení dané úlohy LP je tedy třeba vynulovat všechny pomocné proměnné. Celý tento postup je vlastně obsahem **první fáze simplexové metody**, ve které jde o výpočet výchozího základního řešení.

Z výše uvedeného je zřejmé, že první fáze simplexové metody odpadá v případech, kdy v kanonickém tvaru vystupují pouze nerovnice typu „$\leq$“, a tedy nepotřebujeme pomocné proměnné. Pokud však v soustavě nerovnic vystupují jiné typy nerovnic, je první fáze simplexové metody nezbytná a slouží k odstranění (vynulování) pomocných proměnných, které jsme museli do modelu zavést. Po ukončení první fáze simplexové metody je získáno přípustné základní řešení (bez pomocných proměnných), které je výchozím řešením pro druhou fázi simplexové metody.

0.3.2 Výchozí simplexová tabulka

Ekvivalentní soustavu rovnic (případně rozšířenou soustavu rovnic, používají-li se pomocné proměnné) v kanonickém tvaru můžeme pro potřeby výpočtu uspořádat do tzv. simplexové tabulky. V našem příkladě bude mít tato tabulka následující tvar:

zákl. prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	3	2	1	0	0	6000
x_4	1	1	0	1	0	2600
x_5	1	0	0	0	1	1800
z_j	-c$_1$	-c$_2$	0	0	0	0

V této tabulce jsou kromě strukturních koeficientů soustavy rovnic a pravé strany, vypsány i základní proměnné. Doplněný je i řádek tzv. redukovaných cenových koeficientů (redukovaných cen), které se ve výchozí tabulce rovnají cenovým koeficientům s opačnými znaménky.

Každému ekvivalentnímu tvaru soustavy rovnic přísluší jedno základní řešení a kanonický tvar je charakterizovaný seznamem základních proměnných (je jich tolik, kolik je lineárně nezávislých řádků soustavy rovnic). Pokud budeme chtít tedy získat jiné základní řešení, musíme získat kanonický tvar s jiným seznamem základních proměnných. V rámci jednoho kroku výpočtu však můžeme provést pouze jednu výměnu základní proměnné za nezákladní a naopak. Nezákladní proměnná, která se v následující iteraci stane proměnnou základní, se označuje jako vstupující proměnná a v simplexové tabulce je ve sloupci, kterému se říká klíčový sloupec. A naopak, základní proměnná, která se v následující iteraci stává nezákladní, se označuje jako vystupující proměnná a v simplexové tabulce jí je přiřazený klíčový řádek. Průsečík klíčového řádku a sloupce je klíčový prvek. Simplexová metoda je vlastně pouze o tom, jakým způsobem volit vstupující a vystupující proměnnou, aby to bylo z hlediska hledání optimálního řešení efektivní.

0.3.3 Test optimality a volba vstupující proměnné

V jakémkoliv kroku výpočtu je třeba mít k dispozici kritérium, které určí, zda dosažené řešení je již optimální nebo není. Test optimality vychází z následujícího jednoduchého vztahu:

$$\Delta z(x_k = t_k \geq 0) = z^{s+1} - z^s = -t_k z_k$$

tzn. změna hodnoty účelové funkce mezi dvěma iteracemi $s+1$ a s. Bude-li jako vsuptující proměnná zvolena proměnná x_k a její nová hodnota bude $t_k \geq 0$, je rovna součinu redukované ceny z_k s novou hodnotou proměnné x_k (s opačným znaménkem). Z toho plyne:

- volba vstupující proměnné se zápornou redukovanou cenou z_k vede ke kladnému (nezápornému) Δz – hodnota účelové funkce v další iteraci nebude tedy rozhodně nižší než v iteraci předcházející,
- volba vstupující proměnné s kladnou redukovanou cenou z_k vede k zápornému (nekladnému) Δz – hodnota účelové funkce v další iteraci nebude tedy rozhodně vyšší než v iteraci předcházející.

Pro optimální řešení tedy musí platit následující:

- pro maximalizační úlohu – $z_j \geq 0, j \in N$ (množina indexů nezákladních proměnných), tzn. nelze už dále zvýšit hodnotu účelové funkce,
- pro minimalizační úlohu – $z_j \leq 0$, $j \in N$, tzn. nelze už dále snížit hodnotu účelové funkce.

Pokud není v nějakém kroku výpočtu řešení ještě optimální, je třeba zvolit nejprve vstupující proměnnou. Volba vstupující proměnné ovlivňuje, jak se změní hodnota účelové funkce – tato volba má vliv pouze na **optimalitu** (nikoliv na přípustnost), tj. na to, jestli bude optimální řešení dosaženo v nižším nebo vyšším počtu iterací. Pro volbu vstupující proměnné lze použít jedno ze tří kritérií. Uvedeme pravidla pro maximalizační úlohu (pro minimalizační je třeba volit z kladných redukovaných cen, abychom dosáhli záporného Δz).

1. $z_k = \min z_j$, $z_j < 0$, $j \in N$, jako vstupující proměnnou x_k zvolíme tu, která má nejnižší zápornou redukovanou cenu, rozhodujeme se tedy podle relativního přírůstku hodnoty účelové funkce (na jednu jednotku vstupující proměnné), neboť absolutní přírůstek je roven $-t_k z_k$. Výhodou tohoto postupu je výpočetní jednoduchost, ale počet kroků výpočtu může být vyšší než u dalšího kritéria a rovněž tento způsob neošetřuje možnost zacyklení výpočtu v případě degenerovaného řešení.
2. Jako vstupující proměnná x_k se podle tohoto kritéria zvolí ta, která dosahuje maximálního absolutního přírůstku $-t_k z_k = \max(-t_j z_j, j \in N^+)$. Pro každou potenciální vstupující proměnnou x_j, $j \in N^+$ (kde N^+ je množina indexů nezákladních proměnných, jejichž volbou dosáhneme kladné změny hodnoty účelové funkce) se tedy třeba vypočítat hodnotu t_j a součin $-t_j z_j$, který dává absolutní hodnotu změny účelové funkce. Uvedený postup je výpočetně složitější než předchozí, ale umožňuje dosáhnout optimálního řešení v nižším počtu kroků. Zacyklení při degeneraci toto kritérium rovněž nezabrání.

3. **Blandovo pravidlo** je velmi jednoduché pravidlo, které jako vstupující proměnnou volí proměnnou s nejnižším indexem $k = \min(j, j \in N^+)$. Tímto způsobem není sice vůbec zohledňován přírůstek účelové funkce, ale je dokázáno, že se tím zamezí zacyklení při degeneraci, což je natolik podstatná výhoda, že se dnes toto pravidlo používá v programových systémech pro řešení úloh LP.

0.3.4 Volba vystupující proměnné

Po volbě vstupující proměnné x_k je třeba určit vystupující proměnnou, tj. proměnnou, která přestane být základní. Vystupující proměnná se volí podle následujícího vztahu:

$$t_k = \min_{a_{ik}>0} \frac{b_i}{a_{ik}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Řádek, ve kterém je minimální podíl hodnot na pravé straně a kladných hodnot v klíčovém sloupci, je řádkem klíčovým – označme jeho index q. Výše uvedený vztah je odvozen z podmínek nezápornosti pro základní proměnné v dané iteraci. Volba vystupující proměnné proto zajišťuje **přípustnost** řešení v následující iteraci a naopak nijak nesouvisí s optimalitou. Porušení pravidla pro volbu vystupující proměnné má za bezprostřední následek porušení přípustnosti (hodnota některé ze základních proměnných by byla záporná). Vzhledem k tomu, že se volba vystupující proměnné týká pouze přípustnosti řešení, používá se stejné pravidlo při maximalizační i při minimalizační úloze.

0.3.5 Přepočet simplexové tabulky

Přepočet simplexové tabulky podle zvoleného klíčového prvku a_{qk} (q je index klíčového řádku, k index klíčového sloupce) je možné snadno realizovat pomocí následujících transformačních vztahů:

$$a_{qj}^{s+1} = \frac{a_{qj}^s}{a_{qk}^s}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{pro klíčový řádek}$$

$$b_q^{s+1} = \frac{b_q^s}{a_{qk}^s}, \quad b_i^{s+1} = b_i^s - a_{ik}^s b_q^{s+1}, \quad i \neq q, \quad \text{pro vektor pravé strany}$$

$$a_{ij}^{s+1} = a_{ij}^{s} - a_{ik}^{s} a_{qj}^{s+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq q, \quad \text{pro všechny ostatní řádky}$$

$$z_{j}^{s+1} = z_{j}^{s} - z_{k}^{s} a_{qj}^{s+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{pro řádek redukovaných cen}$$

$$z^{s+1} = z^{s} - z_{k}^{s} b_{q}^{s+1}, \quad \text{pro hodnotu účelové funkce}$$

kde s a $s+1$ jsou indexy dvou po sobě následujících iterací.

V tabulce uvádíme již bez dalšího komentáře výpočet optimálního řešení ilustračního příkladu simplexovou metodou. Klíčový sloupec a řádek jsou zvýrazněny tučně. Optimální řešení je dané vektorem hodnot proměnných $x^{\text{opt}} = (800, 1800, 0, 0, 1000)$. Optimální hodnota účelové funkce je $z^{\text{opt}} = 876\,000$.

zákl. prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{ik}
x_3	**3**	2	1	0	0	6000	2000
x_4	**1**	1	0	1	0	2600	2600
x_5	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1800**	**1800**
z_j	**-420**	-300	0	0	0	0	

zákl. prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{ik}
x_3	**0**	**2**	**1**	**-3**	**6**	**600**	**300**
x_4	0	**1**	-1	1	0	800	800
x_5	0	**0**	0	1	1	1800	xxx
z_j	0	**-300**	0	0	420	756000	
x_2	0	1	1/2	0	**-3/2**	300	xxx
x_4	**0**	**0**	**-1/2**	**1**	**1/2**	**500**	**1000**
x_5	1	0	0	0	**1**	1800	1800
z_j	0	0	150	0	**-30**	846000	
x_2	0	1	1	3	0	1800	
x_5	0	0	-1	2	1	1000	
x_1	1	0	1	-2	0	800	
z_j	0	0	120	60	0	876000	

Při řešení úlohy LP simplexovou metodou může dojít v podstatě ke třem základním způsobům zakončení výpočtu, které jednotlivé programové produkty indikují příslušnou zprávou (v závorce uvádíme anglický ekvivalent, se kterým se lze setkat při řešení úloh LP v optimalizačních systémech):

1. Úloha LP má optimální řešení (*optimal solution found*). Znamená to, že jsou splněny podmínky optimality tak, jak byly uvedeny výše. Úloha LP může mít buď jediné optimální řešení nebo optimálních řešení může být více. Druhá možnost je ovšem velmi speciální případ a téměř žádný z profesionálních optimalizačních systémů ji neindikuje, proto se zde touto možností nebudeme zabývat.

2. Úloha LP nemá přípustné řešení (*LP problem is infeasible*). Při výpočtu simplexovou metodou se tato situace pozná tak, že nelze z výpočtu vyloučit všechny pomocné proměnné, které představují míru nepřípustnosti stávajícího řešení. Pokud dojde k tomuto zakončení při řešení nějaké reálné úlohy, znamená to, že jsou nastavena omezení příliš „přísně“ a je třeba je uvolnit. Některé softwarové produkty dokonce v takové situaci poskytují doporučení, jak změnit pravé strany omezujících podmínek, aby přípustné a tedy i optimální řešení existovalo.

3. Úloha LP nemá omezenou hodnotu účelové funkce, má tedy přípustné řešení, ale nemá řešení optimální (*LP problem is unbounded*). Při numerickém zpracování nastává tato situace tehdy, když ve zvoleném klíčovém sloupci nejsou žádné kladné koeficienty a nelze tedy zvolit klíčový řádek. Tato situace může být poměrně častá a signalizuje, že model je zřejmě nesprávně nebo neúplně sestavený.

0.4 Duálně sdružená úloha

Každé úloze lineárního programování lze přiřadit její duální úlohu. Pokud máme primární úlohu ve tvaru:

$$\max \quad c^T x$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

pak její duální úloha je ve tvaru:

$$\min \quad b^T y$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} A^T y &\geq c, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Duální úloha nám umožňuje najít dolní nebo horní odhad optimální hodnoty účelové funkce a využívá se pro kontrolu správnosti výsledků primární úlohy.

Mezi primární a duální úlohou platí následující vlastnosti:

- Pokud má primární úloha konečné optimální řešení, pak ho má i duální úloha.
- Hodnoty optimálních účelových funkcí primární a duální úlohy jsou shodné.
- Pokud jedna z úloh nemá konečné řešení, druhá úloha je buď nerealizovatelná, nebo nemá omezené řešení.

Význam duálních proměnných úzce souvisí s pojmem stínové ceny. Stínové ceny jsou strukturní duální proměnné a jejich určení je důležité pro manažerské rozhodování, neboť jde o znalost toho, jak se hodnota účelové funkce bude měnit v závislosti na změně hodnoty pravé strany určité podmínky. Stínová cena je vlastně definována jako hodnota, o kterou se změní hodnota účelové funkce při změně hodnoty pravé strany i-té podmínky o hodnotu 1. Stínové ceny odpovídají optimálním hodnotám duálních proměnných y^* v duální úloze lineárního programování.

Optimální řešení duální úlohy y^* tedy přímo odpovídá vektorům stínových cen, což ukazuje, že stínové ceny představují implicitní ocenění omezení v původní (prvotní) úloze LP. Jinými slovy, hodnota y_i^* nám říká, jak velký dopad na účelovou funkci má změna dostupnosti omezeného zdroje reprezentovaného b_i.