DR vyšších řádů – úlohy

Homogenní rovnice vyšších řádů

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$

2) $y'' + 4y = 0$

3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

4) $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$

5) $y''' + y'' + y' + y = 0$

Zapíšeme charakteristickou rovnici dané diferenciální rovnice a vyřešíme ji. Podle řešení charakteristické rovnice zapíšeme obecné řešení diferenciální rovnice. Charakteristické rovnice diferenciálních rovnic 4) a 5) řešíme odhadnutím jednoho kořene a následně pomocí dělení polynomů.

Výsledky:

1) obecné řešení $y_o = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{3x}$;

2) obecné řešení $y_o = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;

3) obecné řešení $y_o = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2 x\mathrm{e}^{3x}$;

4) obecné řešení $y_o = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + C_3\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$;

5) obecné řešení $y_o = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Nehomogenní rovnice vyšších řádů

1) $y'' + y = 1$

2) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$

3) $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^{x}$

4) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

5) Řešte rovnici 1) s počátečními podmínkami $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

6) Řešte rovnici $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ s počátečními podmínkami $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Řešíme buď variací konstanty nebo metodou speciální pravé strany (pozor – rovnici 6) lze vyřešit pouze variací konstanty). Obecné řešení rovnice je potom součtem obecného řešení homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Při řešení úloh s počátečními podmínkami dosazujeme jeden bod do obecného řešení a druhý do derivace obecného řešení a následne řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých C_1 a C_2.

Výsledky:

1) obecné řešení $y_o = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1$;

2) obecné řešení $y_o = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x}$;

3) obecné řešení $y_o = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{x}$;

4) obecné řešení $y_o = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 x \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$;

5) partikulární řešení $y_p = \cos x + 2\sin x + 1$;

6) partikulární řešení $y_p = \sin x + 2\cos x + x\sin x + \ln|\cos x|\cos x$.