Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

3.4.2024

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Střední hodnota přínosu hráče i k úhrnu všech jednočlenných, dvoučlenných, ..., N-členných koalic je dána vztahem

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K|-1)!(N-|K|)!}{N!}(v(K) - v(K \backslash \{i\})).$$

Definice

Shapleyho vektor hry N hráčů ve tvaru charakteristické funkce je definován jako vektor

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_N),$$

jehož i-tá složka H_i je vypočtena předchozím vztahem. Složka H_i se nazývá **Shapleyho hodnota** pro hráče i.

Věta

Shapleyho vektor zadané hry je imputací ve hře.

Příklad

Ukážeme si jiný příklad na využití Shapleyho hodnoty. 4 firmy zvažují postavit most. Cena mostu je 20 milionů. Jednotlivé firmy jsou ochotny zaplatit maximálně $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 12$, $u_4 = 16$ milionů, které odpovídají užitku firem z nového mostu (úspora času, pohonných hmot při dopravě apod.). Jakým způsobem by se celkové náklady měly rozdělit mezi firmy?

Uvažujeme charakteristickou funkci ve tvaru

$$v(K) = \max\{\sum_{i \in K} u_i - 20; 0\}$$

Charakteristická funkce vyjadřuje zisk koalice.

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = 0, v(\{1,3\}) = 2, v(\{2,4\} = 4, v(\{3,4\}) = 8$$

$$v(\{1,2,3\}) = 10, v(\{1,2,4\}) = 14, v(\{1,3,4\}) = 18, v(\{2,3,4\}) = 16$$

$$v(\{1,2,3,4\}) = 26$$

Nyní spočteme Shapleyho hodnoty dle vzorce

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K|-1)!(N-|K|)!}{N!}(v(K) - v(K \backslash \{i\})).$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1\cdot 2}{4!}\left[(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + (v(\{1,4\}) - v(\{4\})\right] \\
&+ \frac{2\cdot 1}{4!}\left[(v(\{1,2,3\} - v(\{2,3\}) + (v(\{1,2,4\} - v(\{2,4\}) + (v(\{1,3,4\} - v(\{3,4\})\right] \\
&+ \frac{3!0!}{4!}\,(v(\{1,2,3,4\} - v(\{2,3,4\}) \\
&= \frac{1}{12}(2+6) + \frac{1}{12}(10+10+10) + \frac{1}{4}\cdot 10 = \frac{68}{12} = \frac{17}{3} \\
H_2 &= \frac{13}{3} \\
H_3 &= \frac{20}{3} \\
H_4 &= \frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{H} = \left(\frac{17}{3}, \frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{28}{3}\right)$$

Platby pro jednotlivé firmy po té určíme jako

$$u_i - H_i.$$

Tedy

1. firma $\quad 10 - \frac{17}{3} = \frac{13}{3}$
2. firma $\quad 8 - \frac{13}{3} = \frac{11}{3}$
3. firma $\quad 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$
4. firma $\quad 16 - \frac{28}{3} = \frac{20}{3}$

Celkem zaplatí

$$\frac{13}{3} + \frac{11}{3} + \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = \underline{20}$$

$\triangle$

Nyní uvažujme tzv. volební hru.

- $Q = \{1, 2, \ldots, N\}$ je množina politických stran v parlamentu
- počet poslanců i-té strany bude označován jako a_i
- celkový počet zástupců v parlamentu $a_0 = \sum_{i=1}^{N} a_i$
- **hlasovací pravidlo** α určuje minimální počet hlasujících, který je potřeba k vítězství v hlasování $\lfloor \alpha a_0 \rfloor + 1$
- pak pro vítěznou koalici o m politických stranách $(1 \leq m \leq N)$ platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \lfloor \alpha a_0 \rfloor > 0$$

- v opačném případě jde o koalici poraženou, která nemůže prosadit svou vůli

Kooperativní hry N hráčů - Shapley-Shubikův index

Volební hru uvažujeme jako kooperativní hru N hráčů ve tvaru charakteristické funkce.

- pro všechny koalice K platí buď $v(K) = 0$ nebo $v(K) = 1$
- takovou hru v označujeme jako **prostou hru**
- $v(K) = 1$ pro vítěžnou koalici K a $v(K) = 0$ pro poraženou koalici

Pro další analýzu je nutné přijmout následující tři předpoklady (v reálu ne vždy splněné)

- všichni zástupci jedné strany hlasují vždy jednotně
- vytvoří-li se v určité fázi hlasovacího procesu nějaká koalice stran, pak také všichni členové této koalice hlasují totožně
- je možno vytvořit libovolnou koalici stran a všechny koalice jsou stejně pravděpodobné

Kooperativní hry N hráčů - Shapley-Shubikův index

Nyní na takovou volební hru aplikujeme Shapleyovu hodnotu.

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K|-1)!(N-|K|)!}{N!}(v(K) - v(K \backslash \{i\})).$$

Vzhledem k charakteristické funkci se Shapleyova hodnota zjednoduší na vztah

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K|-1)!(N-|K|)!}{N!},$$

kde sumace probíhá přes všechny vítězné koalice K takové, že $i \in K$ a $K - \backslash\{i\}$ je poražená.

Pak pro Shapleyovy hodnoty platí

$$\sum_{i=1}^{N} H_i = 1, H_i \geq 0$$

a hodnota H_i se nazývá **Shapley-Shubikův index síly** i-tého hráče. Hodnotu lze interpretovat jako pravděpodobnost, že i-tá strana bude nezbytná při sestavování vítězných koalicí.

Příklad

Předpokládejme, že v parlamentu s 200 poslanci jsou zastoupeny tři strany A, B, C, přičemž strana A má 95 poslanců, strana B má 85 poslanců a strana C má v parlamentu 20 zástupců. Pro úroveň $\alpha = 0,5$ můžeme definovat následující volební hru:

$$v(\{A\}) = v\{B\}) = v\{C\}) = 0$$

$$v(\{A, B\}) = v\{A, C\}) = v\{B, C\}) = 1$$

$$v(\{A, B, C\}) = 1$$

Dosazením do vzorce

$$H_i = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K| - 1)!(N - |K|)!}{N!},$$

získáme

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Pokud bychom však uvažovali $\alpha = 0,6$ (vítězná koalice musí mít 120 hlasů), dostaneme odlišnou volební hru:

$$v(\{A\}) = v\{B\}) = v\{C\}) = 0$$

$$v\{A, C\}) = v\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A, B\}) = 1$$

$$v(\{A, B, C\}) = 1$$

Zde získáme

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Moc je v parlamentu soustředěna do rukou dvou velkých stran.

$\triangle$

Kooperativní hry N hráčů - Banzhafův index

S jinou mírou charakterizující rozdělení síly ve volební hře přišel J. F. Banzhaf.

- nechť $v(K) = 1$ a $v(K \setminus \{i\}) = 0$
- potom hráče i lze označit jako nepostradatelného pro vítězství koalice K
- symbolem e_i budeme značit počet všech koalic K takových, pro které je hráč $i \in K$ nepostradatelný

Definice

Banzhafův index síly ve volební hře je definován jako

$$\beta_i = \frac{e_i}{\sum_{i=1}^{N} e_i}.$$

Platí

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1, \beta_i \geq 0.$$

Banzhafův index síly vyjadřuje pravděpodobnost situace, při které strana svým odstoupením může anulovat vítězné postavení koalice.

Příklad

Předpokládejme parlament s 200 poslaneckými mandáty, ve kterém jsou zastoupeny tři strany, A, B, C. Strana A má 100 poslanců, strany B a C mají shodně 50 poslanců. Charakteristická funkce při úrovni $\alpha = 0,5$ má potom tuto podobu:

$$v(\{A\}) = v\{B\}) = v\{C\}) = 0$$

$$v\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A, B\}) = v(\{A, C\}) = 1$$

$$v(\{A, B, C\}) = 1$$

Při hlasování budou úspěšné návrhy, pro které budou hlasovat členové koalice $\{A, B\}$ nebo $\{A, C\}$ nebo$\{A, B, C\}$.

Existuje celkem pět možnosti, které vedou k poražení vítězné koalice:

- hráč A může odstoupit z koalic $\{A, B\}$ nebo $\{A, C\}$ nebo$\{A, B, C\}$
- hráč B může odstoupit z koalice $\{A, B\}$
- hráč C může odstoupit z koalice $\{A, C\}$.

Tedy

$$\begin{aligned} e_1 &= 3 \\ e_2 &= 1 \\ e_3 &= 1 \end{aligned}$$

a Banzhafův index síly, jenž charakterizuje blokovací schopnost v hlasovacím procesu, má tvar

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Shapley-Shubikův index síly by měl v tomto příkladu tvar

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

$\triangle$

Příklad

Předchůdcem dnešní Evropské unie bylo Evropské hospodářské společenství (EHS), které vzniklo roku 1958. Zakládajícími členy EHS byly Francie, Itálie, Německo a státy Beneluxu. Při hlasování v EHS se v letech 1958 až 1973 (kdy došlo k rozšíření společenství) používal systém váženého hlasování s váhami:

	Stát	**Váha**
1.	Francie	4
2.	Itálie	4
3.	Německo	4
4.	Belgie	2
5.	Nizozemí	2
6.	Lucembursko	1

Součet všech vah je 17, k přijetí usnesení byla stanovena kvóta 12. Spočtěme Banzhafovy indexy.

Kooperativní hry N hráčů - Banzhafův index

V následujících vítězných koalicích stačí vystoupení jediného tučně označeného člena, aby se koalice stala poraženou.

123	**123**4	**123**56
1245	**123**5	**1245**6
1345	**123**6	**1345**6
2345	**123**46	**2345**6

Tedy počet možných koalic, z kterých mohou státy vystoupit, aby se koalice stala poraženou, a vypočtené indexy vidíme v následující tabulce.

	Stát	**Počet koalic**	**Banzhafův index**
1.	Francie	10	5/21
2.	Itálie	10	5/21
3.	Německo	10	5/21
4.	Belgie	6	3/21
5.	Nizozemí	6	3/21
6.	Lucembursko	0	0

△

Kooperativní hry N hráčů - Nukleolus

Definice

Uvažujme hru v ve tvaru charakteristické funkce s N hráči, imputaci a a koalici K. Číslo

$$e(K, a) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i$$

se nazývá exces koalice K vzhledem k imputaci a (kolik musí koalice zanechat nerozděleno při imputaci a).

Dále označíme symbolem $e(a)$ vektor o délce $2^{|Q|} - 1$ odpovídající excesům všech možných koalic. Seřadíme prvky $e(a)$ sestupně podle velikosti a označíme tuto posloupnost symbolem $f(a)$.

Každé imputaci a se tedy přiřadí vektor $\mathbf{f(a)}$. Pracujeme s množinou

$$\{\mathbf{f(a)} | a \text{ je imputace}\}.$$

Na této množině uvažujme lexikografické uspořádání $\leq_{(lex)}$.

Řekneme, že **imputace b je přijatelnější než imputace a**, jestliže platí

$$\mathbf{f(b)} \leq_{(lex)} \mathbf{f(a)}.$$

Tedy imputace b vzbuzuje méně námitek než imputace a - první rozdílný exces musí být v **f(b)** menší než v **f(a)**.

Definice

Nukleolem hry se nazývá taková imputace, pro kterou platí

$$\mathbf{f(b)} \leq_{(lex)} \mathbf{f(a)} \text{ pro všechny imputace a.}$$

.

Vidíme, že nukleolus je forma globálního optima ve hře (stabilní bod).

Příklad

Mějme hru s charakteristickou funkcí

$$v(Q) = 0, v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1.$$

Vektor $e(a)$ má tyto složky

$$\begin{aligned}
e(\{1,2,3\},\mathbf{a}) &= -a_1 - a_2 - a_3 = 0 \dots \text{ vždy 0 pro Q} \\
e(\{1,2\},\mathbf{a}) &= 1 - a_1 - a_2 = 1 + a_3 \\
e(\{1,3\},\mathbf{a}) &= 1 - a_1 - a_3 = 1 + a_2 \\
e(\{2,3\},\mathbf{a}) &= 1 - a_2 - a_3 = 1 + a_1 \\
e(\{1\},\mathbf{a}) &= -1 - a_1 \\
e(\{2\},\mathbf{a}) &= -1 - a_2 \\
e(\{3\},\mathbf{a}) &= -1 - a_3
\end{aligned}$$

Hledáme tedy

$$\min_{a \text{ je imputace}} \max\{1 - a_3, 1 - a_2, 1 - a_1, -1 - a_1, -1 - a_2, -1 - a_3\}$$

Minimum zřejmě nastává pro $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$.

Pokud není zřejmé, lze řešit pomocí lineárního programování.

Nukleolus je tedy imputace (0,0,0).

$\triangle$

Příklad

Mějme hru s charakteristickou funkcí

$$v(Q) = 6, v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = -4,$$

$$v(\{1,2\}) = 2, v(\{1,3\}) = -1, v(\{2,3\}) = 3.$$

Vektor $e(a)$ má tyto složky

$$\begin{aligned}
e(\{1,2\},\mathbf{a}) &= 2 - a_1 - a_2 = a_3 - 4 \\
e(\{1,3\},\mathbf{a}) &= -1 - a_1 - a_3 = a_2 - 7 \\
e(\{2,3\},\mathbf{a}) &= 3 - a_2 - a_3 = a_1 - 3 \\
e(\{1\},\mathbf{a}) &= 1 - a_1 \\
e(\{2\},\mathbf{a}) &= -a_2 \\
e(\{3\},\mathbf{a}) &= -4 - a_3
\end{aligned}$$

Hledáme tedy

$$\min_{a \text{ je imputace}} \max\{a_3 - 4, a_2 - 7, a_1 - 3, 1 - a_1, -a_2, -4 - a_3\}$$

Vyřešíme pomocí lineárního programování.

$$\begin{array}{rcl} \min & & z \\ a_3 - 4 & \leq & z \\ a_2 - 7 & \leq & z \\ a_1 - 3 & \leq & z \\ 1 - a_1 & \leq & z \\ -a_2 & \leq & z \\ -4 - a_3 & \leq & z \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 6 \\ a_1 & \geq & 1 \\ a_2 & \geq & 0 \\ a_3 & \geq & -4 \end{array}$$

Nalezli jsme bod (2,0,4). Hodnota účelové funkce je -1 a jako rovnice jsou splněny nerovnosti

$$\begin{aligned} a_1 - 3 &\leq -1 \\ 1 - a_1 &\leq -1 \end{aligned}$$

Tedy hodnota $a_1 = 2$ je brána jako finální, neexistuje žádná jiná imputace ($a_1 \neq 2$), která by měla na druhém a třetím místě nižší číslo než -1 (první je vždy nula). Vektor **f(a)** pro nukleolus hry začíná $(0, -1, -1, \cdot, \cdot, \cdot)$.

Nyní hodnotu $a_1 = 2$ zafixujeme a vypustíme výše uvedené nerovnosti. Řešíme další úlohu lineárního programování.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z \\
a_3 - 4 &\leq z \\
a_2 - 7 &\leq z \\
-a_2 &\leq z \\
-4 - a_3 &\leq z \\
2 + a_2 + a_3 &= 6 \\
a_2 &\geq 0 \\
a_3 &\geq -4
\end{aligned}
$$

Řešením úlohy je $a_2 = 3,5$ a $a_3 = 0,5$, hodnota účelové funkce je -3,5 a jako rovnosti jsou splněny první 4 nerovnosti. Tedy máme vektor

$$\mathbf{f(a)} = (0; -1; -1; -3,5; -3,5; -3,5).$$

Je zřejmé, že nenalezneme přijatelnější imputaci, tedy nukleolem hry je imputace (2;3,5;0,5).

$\triangle$

Příklad

Uvažujme hru ve tvaru charakteristické funkce

$$v(1) = \frac{1}{2}, v(2) = 0, v(1,2) = 1.$$

Imputace:

$a_1 \geq \frac{1}{2}, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1 \quad \Rightarrow a_1 \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, a_2 = 1 - a_1$

Jádro hry:

$a_1 \geq \frac{1}{2}, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1 \quad \Rightarrow a_1 \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, a_2 = 1 - a_1$

Shapleyho hodnota:

$H_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4} \quad H_2 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{4}$

Kooperativní hry N hráčů - Příklad

Nukleolus:

$$e(K,a) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i$$

Pak

$$e(\{1\},a) = \frac{1}{2} - a_1, e(\{2\},a) = 0 - a_2, e(\{1,2\},a) = 1 - a_1 - a_2 = 0$$

$$\begin{aligned} e(a) &= (-a_2, \frac{1}{2} - a_1, 0) = (-a_2, a_2 - \frac{1}{2}, 0) \\ f(a) &= (0, -a_2, a_2 - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow 0 \leq a_2 \leq \frac{1}{4} \\ f(a) &= (0, a_2 - \frac{1}{2}, -a_2) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq a_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Pokud $a_2 = 0$, pak exces je $(0, 0, -\frac{1}{2})$.
Pokud $a_2 = \frac{1}{4}$, pak exces je $(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

$$(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \leq_{(lex)} (0, 0, -\frac{1}{2})$$

Nukleolus je $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Nashův součin:

$$\left(a_1 - \frac{1}{2}\right) a_2 = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)(1 - a_1) = \frac{3}{2} a_1 - a_1^2 - \frac{1}{2} = h(a_1)$$

Hledáme maximum funkce $h(a_1)$

$$h'(a_1) = -2a_1 + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{4}$$

Tedy Nashovo vyjednávací řešení je

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

$\triangle$

Děkuji za pozornost.