Algebra I – úlohy k procvičení – 25.11.2020

1. (a) Nechť
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Určete počet inverzí v permutaci σ. Určete, zda permutace σ je sudá či lichá.

   (b) Nechť n je celé číslo, $n \geq 3$. Nechť
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Určete počet inverzí v permutaci τ. Určete, zda permutace τ je sudá či lichá.

2. Vypočtěte
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Nechť k, n jsou celá čísla, $2 \leq k \leq n$. Nechť $i_1, i_2, \dots, i_k$ jsou navzájem různá čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

   Symbol $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ označuje permutaci $\sigma \in S_n$ takovou, že
$$\sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3,\ \dots\ , \sigma(i_{k-1}) = i_k,\ \sigma(i_k) = i_1,$$
$$\sigma(j) = j \text{ pro } j \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_k\}$$
   Permutace $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ se nazývá k **- cyklus** (**cyklus délky** k).

   Nechť $\sigma, \tau \in S_n$, $\sigma = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ je k - cyklus, $\tau = (j_1\ j_2\ \dots\ j_l)$ je l - cyklus. Cykly σ a τ se nazývají **disjunktní**, pokud $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$.

   Dokažte, že disjunktní cykly komutují, tj. $\sigma\tau = \tau\sigma$.

   Poznámka: Povšimněte si, že 2-cykly jsou transpozice a naopak, tj. pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, je $(i\ j) = (i \leftrightarrow j)$.

4. Nechť n je kladné celé číslo. Nechť $\pi \in S_n$. Pak permutace π je identická nebo je součinem několika vzájemně disjunktních cyklů. Dokažte.

5. Nechť n je celé číslo, $n \geq 2$. Nechť $\sigma \in S_n$, σ je cyklus. Dokažte, že cyklus σ je součinem několika transpozic.