Binomické a Poissonovo rozdělení

Definice 1. Řekneme, že náhodná veličina X má *alternativní rozdělení* pravděpodobností s parametrem p, kde $p \in (0, 1)$, jestliže nabývá pouze dvou hodnot 0 a 1, a to hodnoty 1 s pravděpodobností p a hodnoty 0 s pravděpodobností $q = 1 - p$.

Tvrzení 1. *Vyšetřujme výskyt jistého náhodného jevu A v sérii n náhodných pokusů. Předpokládejme, že jev A nastává s pravděpodobností p nezávislou na výsledcích ostatních pokusů v sérii a označme X četnost výskytu jevu A v sérii. Pak X je náhodná veličina nabývající hodnot $0, 1, \ldots, n$ s pravděpodobnostmi*

(*) $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

kde $q = 1 - p$. Definujme dále posloupnost veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ předpisem

$$X_i = \begin{cases} 1, & jestliže\ v\ \ i\text{-}tém\ pokusu\ nastane\ jev\ A, \\ 0, & jestliže\ v\ \ i\text{-}tém\ pokusu\ nenastane\ jev\ A. \end{cases}$$

Pak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením s parametrem p, přičemž $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Definice 2. Nechť n je přirozené číslo, $p \in (0, 1)$ a $q = 1 - p$. Rozdělení pravděpodobností popsané formulí (*) se nazývá *binomické rozdělení* (s parametry n, p.) Skutečnost, že veličina X má binomické rozdělení s parametry n, p, budeme vyjadřovat zápisem $X \sim Bi(n, p)$.

Poznámka. Povšimněte si, že binomické pravděpodobnosti (*) jsou členy binomického rozvoje

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Odtud plyne, že součet všech binomických pravděpodobností je roven jedné, čímž je ověřeno, že formulí (*) je skutečně definováno diskrétní rozdělení pravděpodobností.

Poznámka. Nechť $p \in (0, 1)$. Binomické rozdělení $Bi(1, p)$ je totožné s alternativním rozdělením s parametrem p.

Tvrzení 1 lze přeformulovat následujícím způsobem.

Tvrzení 2. *Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením s parametrem p. Pak veličina $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ má rozdělení $Bi(n, p)$.*

Příklady.

(1) Mějme hrací kostku, na níž padá šestka s pravděpodobností p. Uvažme sérii n hodů a označme X počet šestek v sérii. Pak $X \sim Bi(n, p)$. Série n hodů jednou kostkou může být přitom nahrazena jedním simultánním hodem n kostkami za předpokladu, že šestka padá na všech kostkách se stejnou pravděpodobností.

(2) Klíčivost semene definujeme jako pravděpodobnost p, že semeno vyklíčí. Vyberme náhodně n semen s klíčivostí p a označme X počet těch z nich, která vyklíčí. Pak $X \sim Bi(n, p)$.

(3) (Průzkum veřejného mínění). Dejme tomu, že v dané populaci (skupině lidí) se $100\cdot p\,\%$ jedinců hlásí k názoru, že by mělo být legalizováno kouření marihuany. Vyberme náhodně n jedinců a označme X počet těch z nich, kteří jsou pro legalizaci. Pak $X \sim Bi(n,\, p)$.

(4) Dejme tomu, že v porostu je $100\cdot p\,\%$ stromů napadených červenou hnilobou. Vyberme náhodně n stromů a označme X počet těch z nich, které jsou napadené. Pak $X \sim Bi(n,\, p)$.

(5) Pěstujeme hrách s bílými a fialovými květy. Předpokládáme přitom v souladu s druhým Mendelovým zákonem, že rostlina vykvete fialově s pravděpodobností $p = 3/4$. Vyberme náhodně n ještě nevykvetlých rostlin a označme X počet těch z nich, které nakonec vykvetou fialově. (Možnost, že rostlina nevykvete přitom nepřipouštíme.) Pak $X \sim Bi(n,\, p)$.

(6) Střelec střílí do terče, přičemž má k dispozici n ran. Předpokládejme, že pravděpodobnost p, s níž střelec zasahuje terč, je stále stejná (a nezávislá na předchozím průběhu střelby). Označme X počet úspěšných zásahů. Pak $X \sim Bi(n,\, p)$.

Vyčíslení binomického rozdělení. Pro vyčíslení binomického rozdělení lze s výhodou použít dále popsanou rekurentní formuli. Označme

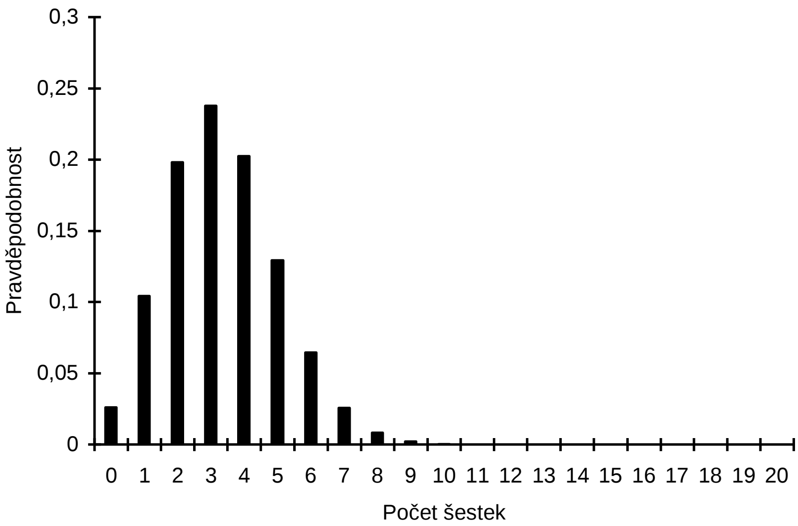
$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ kde } q = 1 - p\,.$$

Pak

(**)
$$p_0 = q^n,$$
$$p_{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}\cdot p_k \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Příklad 1. Hodíme dvacetkrát pravidelnou hrací kostkou. Označme X počet šestek v takové sérii hodů. Úkolem je vyčíslit rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X.

Řešení. Veličina X má rozdělení $Bi(20,\, 1/6)$, tj. binomické rozdělení s parametry $n = 20$ a $p = 1/6$. Označme $p_k = P(X = k)$. Jednotlivé pravděpodobnosti p_k lze vypočítat přímým dosazením do formule (*), chceme-li však určit celé rozdělení, je z hlediska složitosti výpočtu mnohem výhodnější použít formuli (**). Grafické znázornění rozdělení pravděpodobností počtu šestek v sérii dvaceti hodů pravidelnou hrací kostkou a numerické vyčíslení jednotlivých pravděpodobností (s přesností na čtyři desetinná místa) je zachyceno v následujícím tyčkovém diagramu a tabulce:



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	0,0261	0,1043	0,1982	0,2379	0,2022	0,1294	0,0647	0,0259	0,0084	0,0022	0,0005
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$P(X=k)$	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

Vidíme, že jednotlivé pravděpodobnosti nejprve monotónně rostou a posléze zas monotónně klesají. Obrat nastává pro $k=3$; tento počet šestek v sérii dvaceti hodů pravidelnou hrací kostkou je nejpravděpodobnější (je modem).

Z rekurentní formule (**) vyplývá, že *binomické rozdělení má vždy právě jeden lokální modus, případně mohou existovat dvě po sobě následující nejpravděpodobnější hodnoty. Vzdalujeme-li se přitom od modu doleva či doprava, jednotlivé binomické pravděpodobnosti klesají*. Je tomu tak proto, že součinitel

$$\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}$$

v rekurentní formuli (**) s rostoucím k klesá. Je-li přitom tento součinitel větší než jedna, pak $p_{k+1}>p_k$, je-li naopak menší než jedna, pak $p_{k+1}<p_k$. Největší nezáporné celé číslo k, vyhovující nerovnosti

$$\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}>1,$$

je tedy hodnotou předcházející modu. Snadno nahlédneme, že předchozí nerovnost je ekvivalentní s nerovností $k<np-q$. Modus je proto nejmenším celým číslem, které je větší nebo rovno číslu $np-q$. Jinak řečeno, modus je celým číslem nacházejícím se v uzavřeném intervalu $[np-q,\, np-q+1]$ neboli $[np-q,\, np+p]$. Tento interval má délku jedna, a proto v něm leží buď právě jediné celé číslo anebo dvě po sobě jdoucí celá čísla. Shrnutím a mírným rozšířením předchozích úvah, dospíváme k následujícímu tvrzení:

Tvrzení 3. *Nechť* $X\sim Bi(n,\,p)$ *a* $q=1-p$. *Pro modus* $\hat{x}$ *veličiny* X *platí*:
(1) $\hat{x}\in[np-q,\, np+p]$
(2) $|\hat{x}-np|\le 1$
(3) *Jestliže* np *je celé číslo, pak* $\hat{x}=np$.
(4) *Číslo* $\hat{x}$ *obdržíme z čísla* np *zaokrouhlením* (*nahoru nebo dolů*).

Při vhodné volbě parametrů $n,\,p$ může být modem rozdělení $Bi(n,\,p)$ i hodnota $k=0$; v takovém případě s rostoucí hodnotou proměnné k binomické pravděpodobnosti p_k stále klesají. Konkrétně platí:

(*a*) *Jestliže* $np-q=0$, *pak* $p_0=p_1>p_2>\ldots>p_n$.
(*b*) *Jestliže* $np-q<0$, *pak* $p_0>p_1>p_2>\ldots>p_n$.

Podobně může být modem i největší hodnota rozdělení $Bi(n,\,p)$, totiž $k=n$.

Vraťme se ještě k příkladu 1. Zde je $[np-q,\, np+p]=[5/2,\, 7/2]$ a tento interval obsahuje jediné celé číslo, totiž $k=3$. Určili jsme tak modus rozdělení $Bi(20,\,1/6)$ bez znalosti pravděpodobností jednotlivých hodnot. Přímým výpočtem dále ověříme, že střední hodnota rozdělení $Bi(20,\,1/6)$ je

$$0\cdot 0{,}026+1\cdot 0{,}104+2\cdot 0.198+\ldots \doteq 3{,}333.$$

Tento výsledek nepřekvapuje, neboť v sérii hodů hrací kostkou padne „v průměru“ v každém šestém hodu šestka, což znamená, že na dvacet hodů připadá „průměrně“ $20/6\doteq 3{,}333$ šestek. Obecně lze pak ukázat, že střední hodnota rozdělení $Bi(n, p)$ je rovna np. To ale ve spojení s tvrzením 3, bod (2) znamená, že *střední hodnota binomického rozdělení se prakticky shoduje s jeho modem*. Je dobré si uvědomit, že toto je specifická vlastnost binomického rozdělení, která pro obecné diskrétní rozdělení pravděpodobností neplatí.

Tvrzení 4. *Nechť* $X \sim Bi(n, p)$. *Pak při označení* $q = 1 - p$ *je* $E(X) = np$ *a* $D(X) = npq$.

Důkaz. Je

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np .$$

Poslední suma je totiž součtem pravděpodobností všech hodnot rozdělení $Bi(n-1, p)$. Podobně

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) p^k q^{n-k} + np$$

$$= n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} + np = n(n-1) p^2 + np .$$

Konečně

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = n(n-1) p^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p) = npq .$$

Tím je důkaz proveden. □

Definice 3. Nechť λ je kladné reálné číslo. Řekneme, že náhodná veličina X má *Poissonovo rozdělení* s parametrem λ, jestliže X nabývá hodnot $0, 1, 2, \ldots$ s pravděpodobnostmi

(†) $$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} .$$

Skutečnost, že veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem λ budeme vyjadřovat zápisem $X \sim Po(\lambda)$.

Poznámka. Jelikož

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 ,$$

je formulí (†) je skutečně definováno diskrétní rozdělení pravděpodobností.

Poissonovo rozdělení bývá často používáno jako aproximace rozdělení binomického. Jestliže totiž n je příliš veliké, a naopak p příliš malé číslo, pak výpočet binomických pravděpodobností (*) je numericky obtížný, neboť kombinační číslo $\binom{n}{k}$ může být extrémně veliké a naopak číslo p^k extrémně malé. V takovém případě lze výraz (*) nahradit jeho limitou pro $n \to \infty$ a $p \to 0$ při označení $np = \lambda$. Ukazuje se, že touto limitou je k-tý člen rozdělení Poissonova. To je obsahem následujícího tvrzení.

Tvrzení 5. *Jestliže* $n \to \infty$ *a* $p \to 0$ *takovým způsobem, že* $np = \lambda$, *kde* λ *je kladná konstanta, pak* k *- tý člen binomického rozdělení*

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

konverguje ke k *- tému členu Poissonova rozdělení*

$$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \ .$$

Důkaz. Nechť $k = 0, 1, 2, \ldots$ je pevně zvolené číslo. Pak

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{np(np-p)(np-2p)\cdot \ldots \cdot (np-kp+p)}{k!} \cdot \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k} \ .$$

Jelikož $p \to 0$ (tedy $1-p \to 1$) a $np = \lambda$, konverguje výraz

$$\frac{np(np-p)(np-2p)\cdot \ldots \cdot (np-kp+p)}{k! \cdot (1-p)^k}$$

k číslu $\lambda^k / k!$. Dále pak

$$(1-p)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda},$$

čímž je důkaz proveden. □

Praktické kritérium. Dle předchozího tvrzení lze pro veliké n a malé p nahradit binomické rozdělení $Bi(n, p)$ Poissonovým rozdělením $Po(\lambda)$, kde $\lambda = np$. Toto rozdělení má pouze jeden neznámý parametr λ a je oproti rozdělení binomickému mnohem snáze vyčíslitelné. Praktické kritérium (pro dobrou shodu binomického rozdělení s rozdělením Poisonovým) je přitom následující: n je řádově alespoň 10^2 (či alespoň několik desítek) a $0 < np < 10$.

Poznámka. Povšimněte si, že výše popsaná aproximace binomického rozdělení Poissonovým je realizována tak, že se shodují střední hodnoty obou rozdělení.

Podobně jako v případě rozdělení binomického spočívá efektivní způsob vyčíslení Poissonova rozdělení nikoliv v použití formule (†), nýbrž v použití formule rekurentní. Ta má v případě Poissonova rozdělení s parametrem λ následující podobu. Položme

$$p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \ .$$

Pak

(††)
$$p_0 = e^{-\lambda},$$
$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} \cdot p_k \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots \ .$$

Z formule (††) lze vyvodit obdobné závěry o tvaru a modu Poissonova rozdělení jako v případě rozdělení binomického. Konkrétně *Poissonovo rozdělení má vždy právě jeden lokální modus, který může být případně zdvojený. Vzdalujeme-li se přitom od modu doleva či doprava, jednotlivé poissonovské pravděpodobnosti klesají.* Konkrétní hodnotu modu a tvar Poissonova rozdělení s parametrem λ můžeme přitom okamžitě určit na základě následujících tvrzení.

Tvrzení 6. *Nechť* $X \sim Po(\lambda)$. *Pro modus* $\hat{x}$ *veličiny* X *platí*:
(1) $\hat{x} \in [\lambda - 1, \lambda]$
(2) $|\hat{x} - \lambda| \leq 1$
(3) *Jestliže* λ *je celé číslo, pak existují právě dvě nejpravděpodobnější hodnoty veličiny* X *, totiž* $\lambda - 1$ *a* λ.
(4) *Jestliže* λ *není celé číslo, pak modus* $\hat{x}$ *je určen jednoznačně a obdržíme jej zaokrouhlením čísla* λ *dolů.*

Tvrzení 7. *Nechť* $X \sim Po(\lambda)$. *Označme* $p_k = P(X = k)$.
(1) *Jestliže* $\lambda = 1$, *pak* $p_0 = p_1 > p_2 > \dots$.
(2) *Jestliže* $0 < \lambda < 1$, *pak* $p_0 > p_1 > p_2 > \dots$.
(3) $\lim_{k \to \infty} p_k = 0$.

Tvrzení 6, (2) nám říká, že *střední hodnota Poissonova rozdělení se relativně téměř neliší od jeho modu*. Platí totiž následující tvrzení.

Tvrzení 8. *Nechť* $X \sim Po(\lambda)$. *Pak* $E(X) = D(X) = \lambda$.

Důkaz. Je

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda .$$

Poslední suma je totiž součtem pravděpodobností všech hodnot rozdělení $Po(\lambda)$. Podobně

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda$$

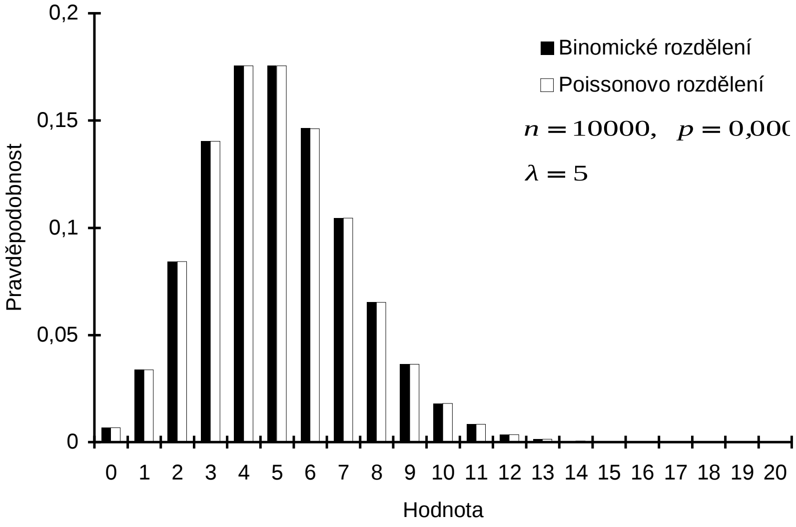
$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda .$$

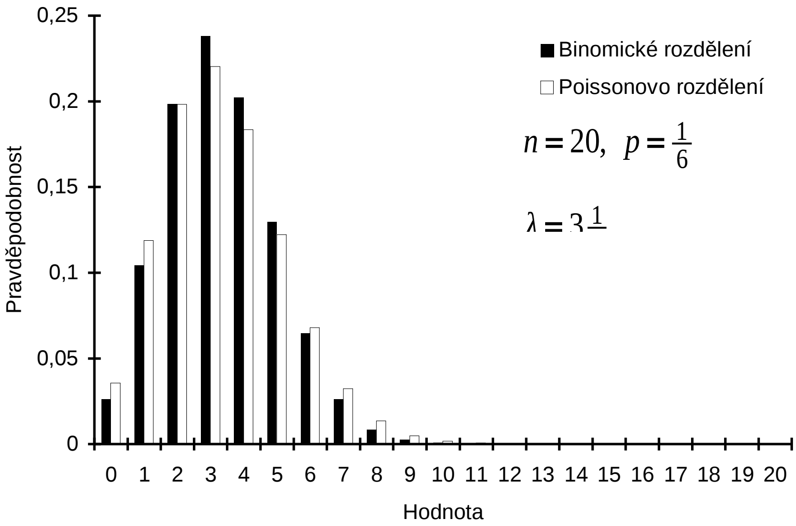
Konečně

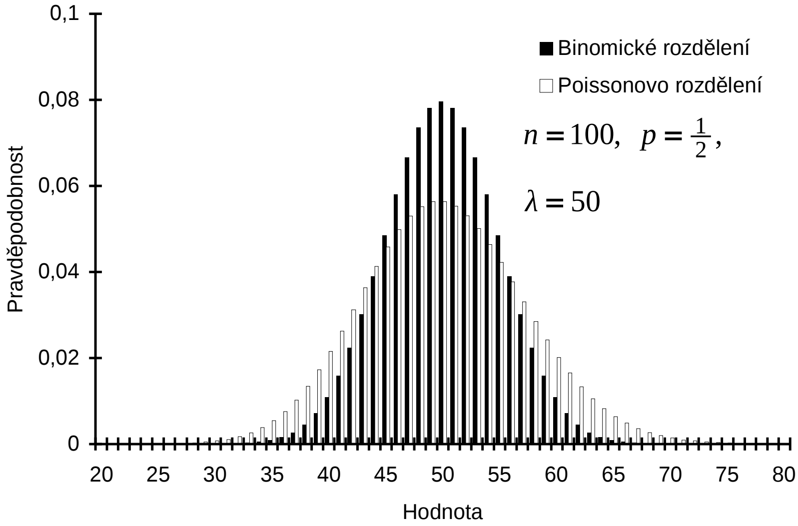
$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Tím je důkaz proveden. □

Příklad 2. Na následujících obrázcích jsou znázorněny tyčkové diagramy tří binomických rozdělení $Bi(n, p)$ spolu s diagramy odpovídajícího Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$, kde $\lambda = np$. Konkrétně byly zvoleny hodnoty $n = 10000,\ p = 0{,}0005$; $n = 20,\ p = 1/6$ a $n = 100,\ p = 1/2$. Zatímco v prvém případě je shoda binomického rozdělení s Poissonovým velmi těsná, ve druhém případě už to říci nelze. V posledním případě pak o žádné dobré aproximaci binomického rozdělení Poissonovým nemůže být ani řeči.


0,2
0,15
0,1
0,05
0
Pravděpodobnost
Binomické rozdělení
Poissonovo rozdělení
$n = 10000, \quad p = 0{,}00$
$\lambda = 5$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Hodnota


0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
Pravděpodobnost
Binomické rozdělení
Poissonovo rozdělení
$n = 20, \quad p = \frac{1}{6}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Hodnota


0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
Pravděpodobnost
Binomické rozdělení
Poissonovo rozdělení
$n = 100, \quad p = \frac{1}{2},$
$\lambda = 50$
20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80
Hodnota

ÚLOHY

1. Klíčivost semen je $p = 0{,}8$. Zasejeme deset semen.
a) Jaká je pravděpodobnost, že vyklíčí právě sedm semen?
b) Jaká je pravděpodobnost, že vyklíčí alespoň sedm semen?
c) Jaký počet vyklíčených semen je nejvíce pravděpodobný?

Řešení. Nechť X je počet semen, která vyklíčí. Veličina X má binomické rozdělení pravděpodobností s parametry $n = 10$ a $p = 0{,}8$. Tedy

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ kde } q = 1 - p .$$

Seznam pravděpodobností p_k pro $k = 1, 2, \ldots, 10$ je obsažen v následující tabulce:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	$1 \cdot 10^{-}$	$4 \cdot 10^{-}$	$7 \cdot 10^{-}$	$8 \cdot 10^{-}$	0,006	0,026	0,088	0,201	0,302	0,268	0,107

Při výpočtu pravděpodobností je přitom výhodné použít rekurentní formuli

$$p_0 = q^n , \quad p_{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_k ,$$

která stanoví, jak na základě znalosti pravděpodobnosti p_k určit pravděpodobnost p_{k+1} . Dostaneme

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0{,}2^{10} , \\
p_1 &= \frac{10}{1} \cdot 4 \cdot p_0 , \\
p_2 &= \frac{9}{2} \cdot 4 \cdot p_1 , \\
&\vdots \\
p_{10} &= \frac{1}{10} \cdot 4 \cdot p_9 .
\end{aligned}$$

Speciálně platí, že a) $P(X = 7) \doteq 0{,}20$, b) $P(X \geq 7) = p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} \doteq 0{,}88$, c) nejvíce pravděpodobný počet vyklíčených semen je roven osmi.

2. Jak určíte modus rozdělení $Bi(10;\, 0{,}8)$ z předchozí úlohy, nechcete-li propočítávat celé toto rozdělení?

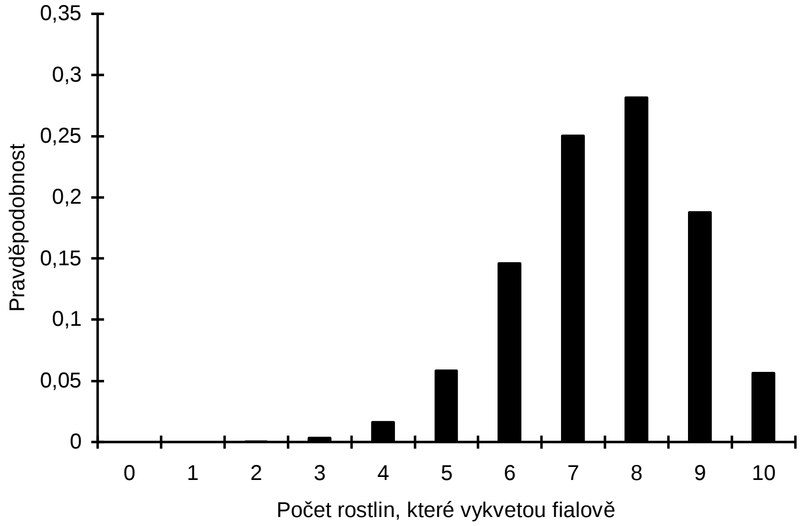
Řešení. Modus rozdělení $Bi(n,\, p)$ je celým číslem z intervalu $[np - q, np + p]$, kde $q = 1 - p$. V tomto intervalu leží vždy též číslo np , tj. střední hodnota rozdělení $Bi(n,\, p)$. Jelikož v daném případě je číslo np celé, konkrétně $np = 8$, je toto číslo též jedinou hodnotou modu. Tudíž $\hat{x} = 8$.

3. Pěstujeme hrách s bílými a fialovými květy. Věříme v platnost Mendelových zákonů a předpokládáme tudíž, že rostlina vykvete fialově s pravděpodobností $3/4$. Jaká je pravděpodobnost, že z deseti rostlin jich právě k vykvete fialově?

Řešení. Nechť X je počet rostlin, které vykvetou fialově. Veličina X má binomické rozdělení pravděpodobností s parametry $n = 10$ a $p = 3/4$. Tedy

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(3/4\right)^k \cdot \left(1/4\right)^{10-k} .$$

Grafické znázornění tohoto rozdělení pomocí tyčkového diagramu je na následujícím obrázku.



4. Určete modus rozdělení $Bi(1000, \frac{1}{6})$, aniž byste propočítávali celé toto rozdělení.

5. Pěstujeme hrách. Přestože se o rostliny dobře staráme, občas některá z nich uhyne. Pravděpodobnost, že k tomu dojde, je však velmi malá; konkrétně předpokládejme, že je rovna 0,002.
a) Jaká je pravděpodobnost, že z jednoho tisíce rostlin
– žádná neuhyne,
– uhynou nejvýše čtyři?
b) Jestliže budeme tvrdit, že z jednoho tisíce rostlin jich uhyne nejvýše sedm, jaká je pravděpodobnost, že nám naše předpověď nevyjde?

Řešení. Nechť X je počet rostlin, které uhynou. Veličina X má rozdělení $Bi(1000; 0{,}002)$. Toto rozdělení lze se značnou přesností aproximovat Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 2$; parametr λ vyjadřuje přitom v daném kontextu střední počet rostlin, které uhynou. Užitečnost aproximace spočívá v tom, že Poissonovo rozdělení se snáze vyčíslí. Dostaneme

$$p_k = P(X = k) \doteq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} ,$$

přitom lze užít rekurentní formuli

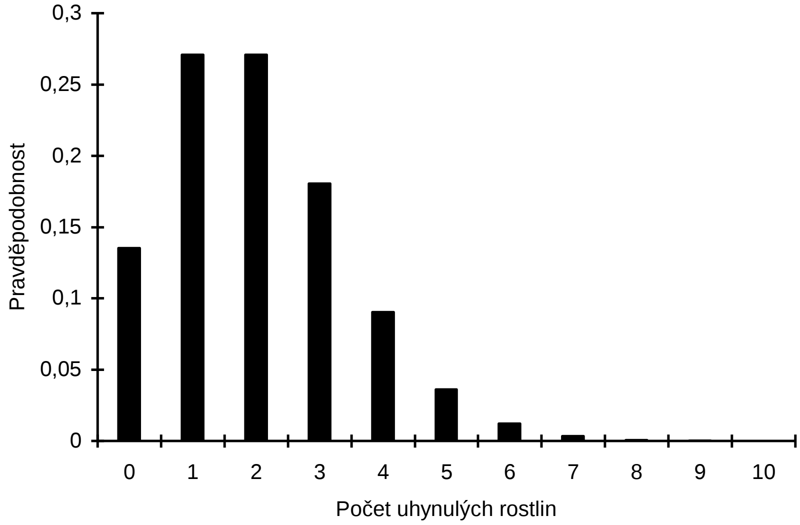
$$p_0 = e^{-\lambda} , \quad p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} \cdot p_k ,$$

která výpočet pravděpodobností p_k ještě více zjednoduší. Povšimněte si, že od již vypočtené pravděpodobnosti p_k přejdeme k pravděpodobnosti p_{k+1} tak, že pravděpodobnost p_k znásobíme hodnotou parametru λ a poté podělíme indexem právě počítané pravděpodobnosti p_{k+1}. Pro $k = 1, 2, \dots, 7$ jsou pravděpodobnosti p_k zaznamenány v následující tabulce:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	0,135	0,271	0,271	0,180	0,090	0,036	0,012	0,003

Speciálně tedy: a) $P(X = 0) = 0{,}135$, $P(X \leq 4) \doteq 0{,}95$, b) $P(X \leq 7) \doteq 0{,}999$.

Znázorníme-li rozdělení pravděpodobností počtu uhynulých rostlin tyčkovým diagramem, je skutečnost, že jen s velmi malou pravděpodobností může uhynout více než sedm rostlin, ihned patrná. (Konkrétně je tato pravděpodobnost rovna 0,001.) Chceme-li být opatrnější, můžeme například tvrdit, že „neuhyne více než deset rostlin“. Pravděpodobnost, že nám tato předpověď nevyjde, je už jenom 0,000008.

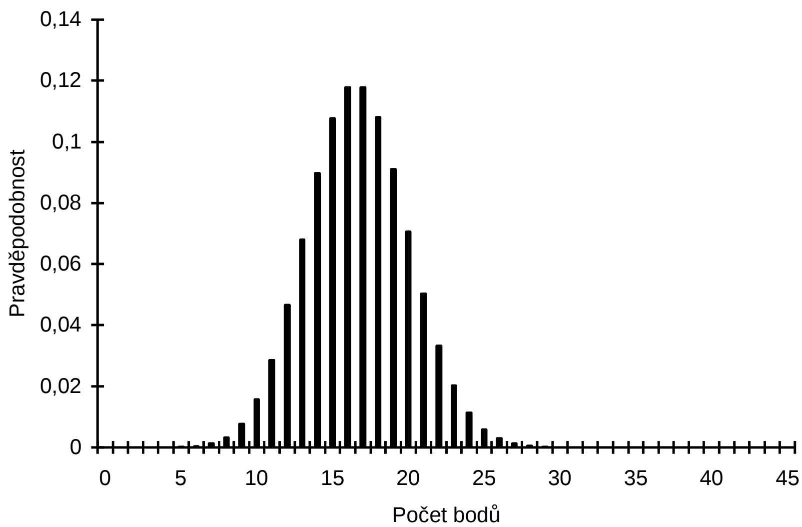


6. Jak určíte modus rozdělení $Po(2)$ z předchozí úlohy, nechcete-li propočítávat celé toto rozdělení?

Řešení. Modus rozdělení $Po(\lambda)$ je celým číslem z intervalu $[\lambda - 1, \lambda]$. V daném případě se jedná o interval $[1, 2]$, existují proto právě dvě nejpravděpodobnější hodnoty rozdělení $Po(2)$, totiž 1 a 2.

7. Při přijímacích zkouškách na lesnickou fakultu psali studenti test z biologie s padesáti otázkami. U každé otázky byly uvedeny tři možné odpovědi, z toho právě jedna správná. Za každou správnou odpověď získal student jeden bod (bylo tedy možno získat nejvýše padesát bodů). Jestliže student získal méně než deset bodů, nebyl doporučen ke studiu. Předpokládejme, že student se na zkoušku vůbec nepřipravil, a volil proto odpovědi zcela náhodně.
a) Jaký počet získaných bodů je při tomto postupu nejvíce pravděpodobný?
b) Jaká je pravděpodobnost, že student při psaní testu uspěl (tj. získal alespoň deset bodů)?

Výsledek: a) 16 a 17 , b) asi 0,99.



Bodové procesy a prostorová uspořádání

Definice 4. *Prostorem* rozumíme libovolný Eukleidovský prostor nebo jeho část; může jít tedy o prostor třírozměrný, ale též dvojrozměrný (rovinu) nebo jednorozměrný (přímku).

Definice 5. *Prostorový bodový proces* (stručněji *bodový proces*) je náhodný proces vybírající body v prostoru. *Prostorová bodová struktura* (stručněji *bodová struktura*) je výsledek působení nějakého bodového procesu. *Body* přitom zpravidla reprezentují pozice určitých hmotných objektů (*jedinců*) či místa výskytu jistých náhodných *událostí*.

Bodový proces, tak jak byl výše nadefinován, je proces spojitý v tom smyslu, že pozice jedinců či místa výskytů událostí se mohou nacházet v jakékoliv části prostoru. Tento proces může však probíhat též v diskrétním prostředí, kdy výskyt jedinců či událostí je omezen pouze na určitá vzájemně oddělená místa.

Definice 6. Bodový proces se nazývá *homogenní*, jestliže umisťuje jedince se stejnou pravděpodobností (resp. generuje události se stejnou intenzitou) ve všech místech prostoru.

Definice 7. Bodový proces se nazývá *čistě náhodný* (též *zcela náhodný*), jestliže místa výskytu jedinců (resp. událostí) nezávisejí na tom, kde jsou umístěni ostatní jedinci (resp. ve kterých místech prostoru nastaly ostatní události).

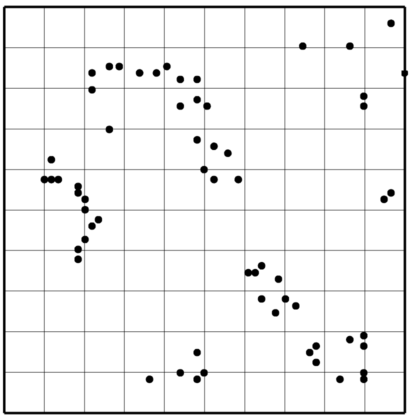
Jestliže výskyt jedince či události v bodě x snižuje pravděpodobnost výskytu dalších jedinců či událostí poblíž tohoto bodu, mluvíme o *inhibici*. Naopak jestliže výskyt jedince či události v bodě x zvyšuje pravděpodobnost výskytu dalších jedinců či událostí poblíž tohoto bodu, mluvíme o *atrakci*.

Příklady (ekologické).

(1) Za výsledek čistě náhodného bodového procesu považujeme např. prostorové rozmístění *potemníků*, *zrnokazů*, *moučných molů* apod.

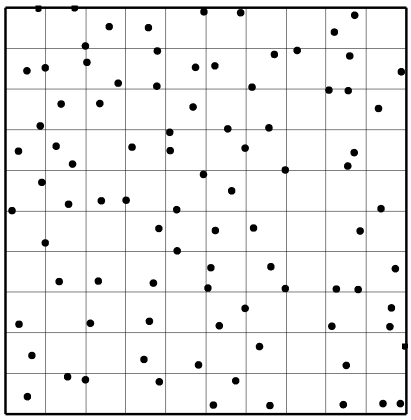
(2) Silná inhibice bývá výsledkem silné konkurence a lze ji zaznamenat spíše u rostlin (u živočichů jen výjimečně). Výsledkem inhibice je vytváření *pravidelných prostorových struktur* (např. u *pouštních keřů* či *koloniálně hnízdících ptáků* – zde je vzdálenost mezi jedinci určena tím, kam až může daný pták doklovnout svým zobákem.) Výsledkem atrakce bývá naopak vytváření shluků a *agregovaných prostorových struktur.*

Příklad 3. Na následujícím obrázku je znázorněno rozmístění dvaašedesáti semenáčků sekvojí vždyzelených na čtvercové ploše; body zachycují pozice jednotlivých stromů a představují dvojrozměrnou bodovou strukturu. Tato struktura je výsledkem bodového procesu, jehož mechanismus je v daném případě znám. Konkrétně všechny stromky jsou soustředěny kolem starých rodičovských stromů (ty však nejsou ve struktuře zakresleny). Shluky potomků rodičovských stromů jsou poměrně dobře patrné a výsledná struktura se proto jeví jako agregovaná.



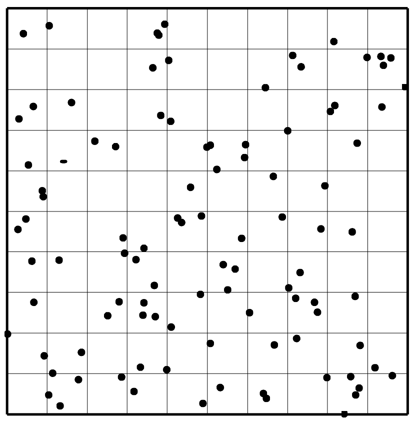
Obr. 1. Prostorové rozmístění sekvojí

Příklad 4. Na následujícím obrázku je znázorněno prostorové rozmístění smrků. Toto rozmístění je víceméně pravidelné, tj. s řádově srovnatelnými rozestupy mezi jedinci, což je třeba připsat nejspíš na vrub inhibice mezi jednotlivými jedinci. Tato inhibice je zabudovaná do bodového procesu, jehož výsledkem je zaznamenaná bodová struktura.



Obr. 2. Prostorové rozmístění smrků

Příklad 5. Na následujícím obrázku je zachycen výsledek homogenního čistě náhodného bodového procesu. Konkrétně jde o výsledek postupného vybírání bodů v jednotkovém čtverci prostřednictvím generátoru náhodných čísel. Pozice žádného z bodů není pak ovlivněna umístěním bodů ostatních, což znamená, že jde o *čistě náhodný proces*. Body jsou přitom generovány (vybírány) ve všech místech prostoru se stejnou intenzitou (pravděpodobností), což znamená, že jde o proces *homogenní*.



Obr. 3. Čistě náhodné rozmístění bodů ve čtverci

Označení. Dejme tomu, že pozorujeme výsledek působení jistého bodového procesu Φ v nějaké omezené množině (lokalitě) B .

(1) Označme $m(B)$ velikost množiny B. Tudíž $m(B)$ je *délka* množiny B v případě bodového procesu na přímce (křivce), *obsah* množiny B v případě bodového procesu v rovině (na ploše) a objem množiny B v případě trojrozměrného bodového procesu.

(2) Označme $\Phi(B)$ počet jedinců (resp. událostí) umístěných (resp. vygenerovaných) procesem Φ v množině B. Pak $\Phi(B)$ je náhodná veličina a současně je to míra. V teorii náhodných procesů bývá nazývána *náhodnou aritmetickou mírou.*

Poznámka. Nechť Φ je homogenní bodový proces. Pak střední počet jedinců (resp. událostí) umístěných (resp. vygenerovaných) procesem Φ v množině B, tj. střední hodnota náhodné veličiny $\Phi(B)$, závisí pouze na objemu množiny B , a nikoliv na jejím umístění či orientaci v prostoru.

Binomický bodový proces

Definice 8. Nechť Ω je určitá omezená část prostoru. Homogenní čistě náhodný bodový proces, rozmisťující určitý předem daný počet jedinců v množině Ω, se nazývá *binomický bodový proces* (v množině Ω).

Věta 1. *Nechť Φ je binomický bodový proces rozmisťující (čistě náhodně) n jedinců v množině Ω a nechť B je jistá část množiny Ω. Pak*

$$\Phi(B) \sim Bi(n,\, p),$$

kde $p = m(B)/m(\Omega)$.

Důkaz. Očíslujme jednotlivé jedince přirozenými čísly $1, 2, \ldots, n$ a definujme posloupnost veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ předpisem

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } i\text{-tý jedinec se nachází v množině } B\,, \\ 0, & \text{jestliže } i\text{-tý jedinec se nenachází v množině } B\,. \end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že proces Φ je homogenní, mají všechny veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ alternativní rozdělení s týmž parametrem $p = m(B)/m(\Omega)$. Skutečnost, že proces Φ je čistě náhodný pak zaručuje, že tyto veličiny jsou vzájemně nezávislé. Přitom

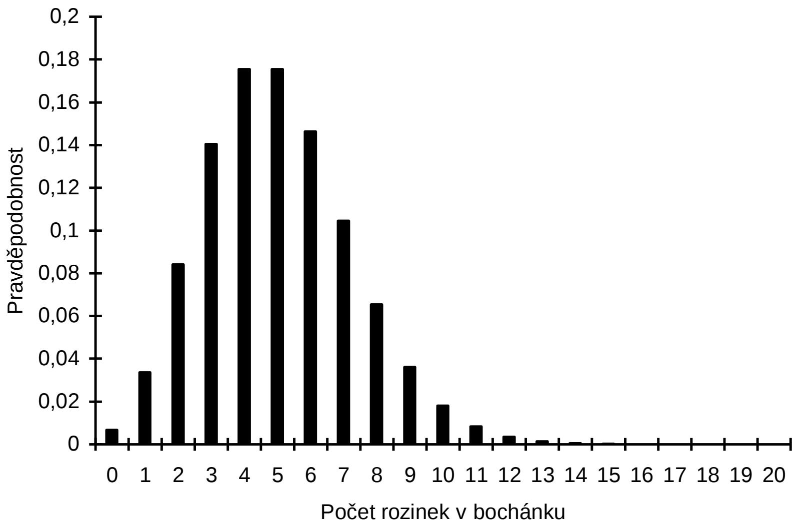
$$\Phi(B) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,,$$

stačí tedy aplikovat tvrzení 2.

Příklad 6 (rozmístění rozinek v bocháncích). Do jednoho sta kilogramů těsta vsypeme deset tisíc rozinek, načež těsto s rozinkami velmi důkladně promísíme. Z těsta poté vytváříme padesátigramové bochánky. Označme X počet rozinek v bochánku.
a) Popište rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X .
b) Vypočítejte pravděpodobnost, že v náhodně vybraném bochánku
– není žádná rozinka,
– jsou alespoň tři rozinky.

Řešení. a) Těsto lze považovat za část třírozměrného Eukleidovského prostoru a mechanismus rozmisťování rozinek v těstě za trojrozměrný bodový proces. V naší úloze jde o proces homogenní, kdy rozinky jsou umisťovány se stejnou pravděpodobností v libovolném místě prostoru; to je ovšem splněno až tehdy, když rozinky v těstě velmi důkladně zamícháme. Dále jde o proces čistě náhodný, neboť je přirozené předpokládat, že mezi jednotlivými rozinkami nejsou žádné prostorové interakce (zde je ovšem důležité, že velikost rozinek je ve srovnání s objemem těsta v podstatě zanedbatelná, pročež lze rozinky v úvahách o jejich prostorovém rozmístění považovat za body). Jinak řečeno, výsledná poloha žádné z rozinek nezávisí na poloze ostatních rozinek v těstě. Počet rozmisťovaných rozinek je přitom pevně dán; označme jej n . Označme dále N počet bochánků. Těsto představuje množinu Ω , náhodně vybraný (avšak v dalších úvahách pevně daný) bochánek je podmnožinou B množiny Ω . Veličina X je totožná s veličinou $\Phi(B)$ z věty 1 a má tudíž dle této věty rozdělení $Bi(n,\, p)$, kde $p = m(B)/m(\Omega) = 1/N$. Shrnuto $X \sim Bi(n,\, {}^1\!/_N)$. V našem případě je $n = 10000$, $N = 2000$, a tedy $X \sim Bi(10000;\, 0{,}0005)$. Rozdělení $Bi(10000;\, 0{,}0005)$ lze přitom s velkou přesností aproximovat Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 5$ (vyjadřujícím průměrný počet rozinek připadajících na jeden bochánek).

b) $P(X = 0) \doteq 0{,}007$, $P(X \geq 3) \doteq 0{,}875$.



Poissonův bodový proces

Definice 9. Homogenní čistě náhodný bodový proces generující v prostoru náhodné události se nazývá *Poissonův bodový proces*. Střední počet událostí připadajících na jednotku objemu (plochy, délky,…) nazýváme *intenzitou* tohoto procesu.

Poznámka. Rozdíl mezi binomickým a Poissonovým bodovým procesem spočívá v tom, že binomický proces rozmisťuje v jisté omezené části prostoru předem dané množství jedinců, zatímco Poissonův proces prostě generuje události (s předem danou intenzitou).

Někdy se pojem Poissonův proces používá v obecnějším slova smyslu pro jakýkoliv čistě náhodný bodový proces generující v prostoru náhodné události a homogenní čistě náhodný proces se pak nazývá *homogenní Poissonův proces* nebo též *Poissonův proces s konstantní intenzitou.*

Věta 2. *Nechť* Φ *je Poissonův bodový proces a* B *je určitá omezená část prostoru. Pak*

$$\Phi(B) \sim Po(\lambda \cdot m(B)),$$

kde λ *je intenzita procesu* Φ.

Důkaz. Představme si množinu B rozdělenou na n velmi malých vzájemně disjunktních částí. Budou-li tyto části „nekonečně malé“ (což nastane pro $n \to \infty$), lze si je představit jako „místa“ v prostoru, v nichž následkem bodového procesu Φ dojde buď k výskytu právě jediné události nebo nedojde k výskytu žádné události (nepřipouštíme tedy výskyt více jak jedné události v jednom a přesně tom samém místě). Vzhledem k tomu, že proces Φ je homogenní, je pravděpodobnost výskytu události pro všechna takto definovaná místa v prostoru stejná; označme tuto pravděpodobnost p. Pravděpodobnost p je zřejmě „přímo úměrná“ velikosti daného místa, tj. $p \approx m(B)/n$. Jsou-li přitom místa nekonečně malá, lze zavést konstantu úměrnosti λ (stejnou pro všechna místa v prostoru) a psát

$$p = \lambda \cdot \frac{m(B)}{n}.$$

Parametr λ má zřejmě význam „intenzity“, s níž se události v prostoru vyskytují, zatím ovšem ještě není zjevné, že jde o intenzitu ve smyslu definice 9. Náhodnou aritmetickou míru $\Phi(B)$ lze nyní definovat jako počet těch míst v množině B, v nichž nastane událost. Jelikož však proces Φ je čistě náhodný, nezávisí pravděpodobnost výskytu události v daném místě na tom, v jakých dalších místech množiny B události nastaly (či nenastaly). Dle tvrzení 1 má tedy veličina $\Phi(B)$ rozdělení $Bi(n, p)$. Přitom však $n \to \infty$ a $np = \lambda \cdot m(B)$. Dle tvrzení 5 je tedy $\Phi(B)$ veličina s rozdělením $Po(\lambda \cdot m(B))$, což bylo dokázat. Odtud dále vyplývá, že střední počet událostí vygenerovaných procesem Φ v množině B je roven $\lambda \cdot m(B)$, a tedy střední počet událostí vygenerovaných procesem Φ v množině s jednotkovým objemem je roven λ. Parametr λ má tedy skutečně význam intenzity ve smyslu definice 9. □

Typická aplikace. Nechť rostliny na louce (tj. v rovině) jsou rozmístěny na základě působení následujícího mechanismu:

(1) Intenzita výskytu rostlin je všude stejná.

(2) Náhodný jev spočívající v tom, že na daném místě vyroste (či nevyroste) rostlina nezávisí na tom, kolik dalších rostlin vyrostlo v okolí tohoto místa.

Budiž B omezená množina představující experimentální plochu, tj. jistou část louky např. čtvercového či kruhového tvaru. Označme $\Phi(B)$ počet rostlin, které se objeví (resp. nachází) v množině B. (Pojem „objeví“ je adekvátní tehdy, jestliže experimentální plocha je předem zvolena a poté čekáme, až rostliny vyrostou, pojem „nachází“ odpovídá situaci, kdy všechny rostliny již vyrostly a poté je na louce náhodně umístěna experimentální plocha dané velikosti a tvaru.) Úkolem je určit rozdělení pravděpodobností veličiny $\Phi(B)$.

Řešení. Mechanismus výskytu rostlin na louce splňující požadavky (1) a (2) představuje Poissonův proces. Veličina $\Phi(B)$ má tudíž Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda \cdot m(B)$, kde λ je intenzita výskytu rostlin na louce, tj. střední počet rostlin připadající na jednotku plochy.

Příklad 7. Předpokládejme, že bodláky jsou na louce rozmístěny zcela náhodně, přičemž střední počet rostlin připadajících na jeden metr čtvereční je roven dvěma. Při procházce po louce si náhodně vybereme místo k odpočinku. Jaká je pravděpodobnost, že v okruhu jednoho metru kolem nás se nacházejí nejvýše dva bodláky?

Řešení. Rozmístění bodláků na louce je dle předpokladů úlohy výsledkem dvojrozměrného homogenního Poissonova procesu s intenzitou (denzitou) dvě rostliny na metr čtvereční. Počet rostlin v kruhu o poloměru jeden metr se tedy řídí Poissonovým zákonem rozdělení pravděpodobností s parametrem $\lambda = 2\pi$. Pravděpodobnost, že se v tomto kruhu nacházejí nejvýše dvě rostliny je asi 0,05.

Jednorozměrný Poissonův proces

Jednorozměrný Poissonův proces zpravidla interpretujeme jako proces výskytu náhodných událostí v čase. Často se pojem *Poissonův proces* používá v užším slova smyslu pouze pro tento typ náhodného procesu. Definice je potom následující.

Definice 10. Proces výskytu náhodných událostí v čase se nazývá *Poissonovým procesem* (*s konstantní intenzitou*), jestliže platí:

(1) K událostem dochází stále se stejnou intenzitou.

(2) Budoucí průběh procesu nezávisí na minulém průběhu procesu.

Příklady. Poissonovým procesem jsou například

(1) výskyty nehod v jistém úseku dálnice, poruch nějakého stroje, pracovních úrazů v určitém provozu,

(2) příchody hovorů na telefonní ústřednu,

(3) rozpad atomů radioaktivní látky (v časovém úseku zanedbatelném v porovnání s poločasem rozpadu),

(4) úmrtí jedinců v populaci s konstantní mortalitou (v časovém úseku zanedbatelném v porovnání se střední délkou života).

Věta 2 nabývá nyní následující formy.

Věta 3. *Nechť N_T je počet událostí, které jakožto výsledek Poissonova procesu s konstantní intenzitou λ nastanou v časovém intervalu délky T. Pak*

$$N_T \sim Po(\lambda T) .$$

Intenzita λ má přitom význam středního počtu událostí připadajících na jednotku času.

Příklad 8. Předpokládejme, že na telefonní ústřednu přicházejí v určité denní době hovory s neměnnou intenzitou tři hovory za jednu minutu.
a) Jaká je pravděpodobnost, že za jednu minutu dojde na ústřednu méně než pět hovorů?
b) Odhadněte s 95% pravděpodobností maximální počet hovorů, které dojdou na ústřednu během jedné minuty.
c) Určete střední délku intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů.
d) Jaká je pravděpodobnost, že délka intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů je delší než jedna minuta?

Výsledek: Nechť X je počet hovorů, které dojdou na ústřednu během jedné minuty. Příchody hovorů na telefonní ústřednu jsou typickým příkladem Poissonova procesu, tudíž $X \sim Po(3)$. Odtud plyne, že: a) $P(X < 5) = 0{,}815263$, b) $P(X \leq 6) \doteq 0{,}966$, c) střední délka intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů je rovna dvaceti vteřinám, d) $P(X = 0) = e^{-3} \doteq 0{,}05$.

Úlohy

1. Dvě stě našich spoluobčanů bezdomovců se čistě náhodně rozmístilo (a poté usadilo) na homogenním stanovišti o rozloze deset čtverečních kilometrů. Uvnitř tohoto stanoviště je desetihektarový pozemek patřící jiné naší spoluobčance Zuzce H. S jakou pravděpodobností osídlili Zuzčino území alespoň tři bezdomovci?

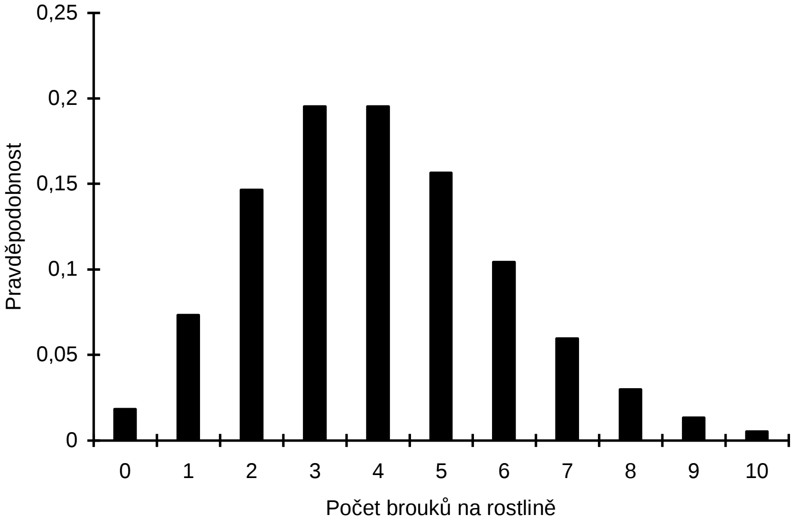
Řešení. Označme X počet bezdomovců osídlivších Zuzčino území. Vzhledem k předpokladu čistě náhodného rozmístění bezdomovců na daném stanovišti má veličina X rozdělení $Bi\left(200, \frac{1}{100}\right)$; přitom lze použít aproximaci $X \sim Po(2)$. Odtud plyne, že $P(X \geq 3) = 0{,}32$.

2. Tisíc turistů vyrazilo na dvacet kilometrů dlouhou túru. Každý z nich dostal na cestu od pořadatelů po jednom jogurtu. Během túry odhodili turisté všechny kelímky od jogurtů podél cesty. Sto metrů dlouhý úsek cesty vede územím kmene Apačů. Každého turistu, který na jejich území odhodí kelímek, Apačové skalpují. Jestliže předpokládáme, že turisté odhazují kelímky v průběhu túry zcela náhodně, jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich přijdou o skalp?

Výsledek: Rozmístění kelímků podél cesty je dle předpokladů úlohy výsledkem jednorozměrného binomického bodového procesu. Hledaná pravděpodobnost je $1 - 6e^{-5} \doteq 0{,}96$.

3. Deset tisíc brouků se čistě náhodně rozmístí na dvou a půl tisíci rostlin. Popište rozdělení pravděpodobností počtu brouků na rostlině a znázorněte je graficky.

Řešení. Náhodný proces generující rozmístění brouků na rostlinách lze považovat za bodový proces v diskrétním prostředí tvořeném rostlinami. Předpokládejme, že prostředí (tvořené rostlinami) je z hlediska životních podmínek brouků homogenní a že rostliny jsou stejně veliké. Počet brouků na rostlině je potom náhodnou veličinou s rozdělením $Bi\left(10000, \frac{1}{2500}\right)$. Z výpočetního hlediska je přitom výhodné aproximovat toto rozdělení Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 4$. Speciálně platí, že na rostlině je s pravděpodobností 0,99 nejvýše devět brouků.



4. Brouci jsou čistě náhodně rozmístěni na rostlinách s intenzitou (denzitou) 4,2 brouka na jednu rostlinu. Jaký počet brouků na rostlině je pak nejvíce pravděpodobný? Určete tuto pravděpodobnost. (Předpokládáme, že rostliny jsou stejně veliké.)

5. Rostliny jsou na dané lokalitě rozmístěny čistě náhodně s intenzitou jedna rostlina na metr čtvereční. Jaký počet rostlin v náhodně vybraném kruhu o průměru jeden metr je pak nejvíce pravděpodobný?

Výsledek: 0

6. Louka je rozdělená na devět set stejně velkých čtverců. Dvě stě dvacet jeden z těchto čtverců přitom neobsahuje žádnou sedmikrásku. Předpokládejte, že sedmikrásky jsou na louce rozmístěny čistě náhodně a opírajíce se o tento předpoklad odhadněte počet sedmikrásek na louce.

Výsledek: 1264

7. Brouci jsou rozmístěni zcela náhodně na (stejně velikých) rostlinách s intenzitou čtyři brouci na rostlinu. Jaká je pravděpodobnost, že se na rostlině nachází lichý (resp. sudý) počet brouků?

Řešení. Nechť brouci jsou na rostlinách rozmístěny čistě náhodně s konstantní intenzitou λ (vyjádřenou v počtu brouků připadajících na jednu rostlinu). Pak

$$P(\text{na rostlině je lichý počet brouků}) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^5}{5!}+\ldots\right) = e^{-\lambda}\sinh\lambda = e^{-4}\sinh 4 \doteq 0{,}49983,$$

$$P(\text{na rostlině je sudý počet brouků}) = e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\ldots\right) = e^{-\lambda}\cosh\lambda = e^{-4}\cosh 4 \doteq 0{,}50017\,.$$

8. Předpokládejme, že během léta uhynou z dané věkové třídy určité populace v průměru tři jedinci denně, přičemž úmrtnost je během celého léta stejná. Označme X počet jedinců, kteří uhynou během jednoho dne.

a) Popište rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X a určete jeho modus.

b) Jaká je pravděpodobnost, že během jednoho dne uhyne nejvýše jeden jedinec?

Řešení. a) Předpokládejme, že zvolená časová jednotka (den) je velmi malá ve srovnání se střední délkou života jedince. Rozdělení pravděpodobností veličiny X je potom Poissonovo s parametrem $\lambda = 3$. (Parametr λ má v daném kontextu význam intenzity umírání neboli *mortality*.) Nejvíce pravděpodobný je přitom úhyn dvou nebo tří jedinců za den.

b) $P(X \leq 1) = 4e^{-3}$