Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

20.3.2024

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Kooperativní hry N hráčů

Kooperativní hry N hráčů

- Nyní zobecníme kooperativní hry na obecný počet N hráčů.
- Uvažujeme hru s *přenosnou výhrou.*
- Když jsou dva hráči, tak jsou jen dvě možnosti - buď se dohodnou na spolupráci, nebo budou vystupovat jako konkurenti.
- V případě N hráčů vzniká nový problém - s kým spolupracovat a proti komu.
- Ze hry v normálním tvaru přejdeme na hru ve tvaru charakteristické funkce.

Kooperativní hry N hráčů

Definice

Uvažujeme hru N hráčů, množinu všech hráčů označíme symbolem Q. **Koalicí** se rozumí skupina hráčů spolupracujících při volbě strategií, případně při přerozdělování výhry. **Koaliční strukturou** se nazývá množina všech koalic, které se v dané situaci z uvažovaných hráčů vytvoří. Koalice budem značit písmeny K, L, Q apod., případně je udáme jako množinu obsahující členy koalice, např. $\{1\}$, $\{3, 4, 6\}$ atd. **Protikoalicí** ke koalici $K \subseteq Q$ se rozumí množina hráčů

$$K^- = Q \setminus K = \{i \in Q; i \notin K\}.$$

Množina všech hráčů Q se nazývá **velká koalice**. Prázdná množina se nazývá **prázdná koalice**.

Kooperativní hry N hráčů

Zatímco ve hře se dvěma hráči máme pouze dvě řešení, v koaliční hře se třemi hráči máme již pět možných řešení.

- Všichni hráči spolupracují.
- První a druhý hráč tvoří koalici proti třetímu hráči.
- První a třetí hráč tvoří koalici proti druhému hráči.
- Druhý a třetí hráč tvoří koalici proti prvnímu hráči.
- Všichni hráči hrají samostatně.

Počet možných koalic rychle roste s počtem hráčů. Ve hře s N hráči je možné vytvořit $2^N - 1$ koalic, přičemž jeden hráč může být členem $2^{N-1} - 1$ různých koalic (nepočítáme prázdnou koalici).

Pro tři hráče jsou možné koalice

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Koaliční struktura může být například

$$(\{1,3\}, \{2,5\}, \{4\}).$$

Předpokládáme hru s **volnou disjunktní koaliční strukturou**, tedy jsou přípustné jakékoli koalice a každý hráč může být členem pouze jedné koalice. Pak počet možných koaličních struktur je

$$R(N) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{k} (-k)^{-j} \binom{k}{j} (k-j)^N$$

Pro rostoucí počet hráčů N dostáváme řadu hodnot $R(2) = 2$, $R(3) = 5$, $R(4) = 52$ atd.

Kooperativní hry N hráčů

- Hráči vyhodnocují sílu jednotlivých koalic a přemýšlí, které koalice se zúčastní.
- V rámci koalice dále přemýšlí, jak rozdělit společný zisk.
- Podíl na zisku musí být větší než nekooperativní zisk jednotlivce.
- Cílem hráče není utvořit koalici, ale zajistit si lepší výsledek než je ten nekooperativní.
- Každý hráč má snahu optimalizovat svůj vlastní individuální zisk a podle toho se rozhoduje.

Kooperativní hry N hráčů

Definice

Hra ve tvaru charakteristické funkce sestává z množiny hráčů

$$Q = \{1, 2, \dots, N\}$$

a reálné funkce v definované na množině všech koalic, pro kterou platí

$$v(\emptyset) = 0.$$

Pro jednoduchost budeme symbolem v značit i příslušnou hru ve tvaru charakteristické funkce.

Definice

Charakteristická funkce je **superaditivní**, pokud pro každé dvě disjunktní koalice K, L platí

$$v(K \cup L) \geq v(K) + v(L).$$

Kooperativní hry N hráčů

Definice

Hra ve tvaru charakteristické funkce (předpokládáme superaditivitu) se nazývá **nepodstatná**, jestliže platí

$$v(Q) = \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}).$$

Hra, která není nepodstatná, se nazývá **podstatná**.

Věta

Nechť K je libovolná koalice hráčů v nepodstatné hře. Potom

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\}).$$

V nepodstatné hře nemá smysl tvořit koalice (není žádná přidaná hodnota).

Představme si kooperativní hru tří hráčů $Q = \{1, 2, 3\}$ s charakteristickou funkcí

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 5, v(Q) = 100$$

Situace zřejmě vedou na velkou koalici. Jaké bude rozložení zisků pro jednotlivé hráče?

Jaké bude v situaci, kdy $v(\{3\}) = 50$?

Kooperativní hry N hráčů

Pro vyjádření rozdělení zisku si zavedeme vektory $a \in \mathbb{R}^N$.

Definice

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s množinou hráčů

$$Q = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

N-tice **a** reálných čísel se nazývá **imputace**, jsou-li splněny následující podmínky:

- **individuální racionálnost**: pro každého hráče i je

$$a_i \geq v(\{i\})$$

- **kolektivní racionálnost**: platí

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q)$$

Imputace je tedy přerozdělení zisku koalice mezi její členy.

Věta

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Je-li v nepodstatná, pak má právě jednu imputaci, a to

$$\mathbf{a} = (v(\{1\}), v(\{2\}), \ldots v(\{N\})).$$

Je-li v podstatná, pak má nekonečně mnoho imputací.

Definice

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce, K je koalice, **a**, **b** jsou imputace. Řekneme, že **a dominuje b pro koalici K**, jestliže platí:

- $a_i > b_i$ pro všechna $i \in K$
- $\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$.

Dominanci budeme značit $a \succ_K b$

Příklad

Uvažujme hru v normálním tvaru, máme tři hráče, každý dvě strategie. Hra je zadaná následující tabulkou.

Trojice strategií	Výplatní vektory
1,1,1	-2,1,2
1,1,2	1,1,-1
1,2,1	0,-1,2
1,2,2	-1,2,0
2,1,1	1,-1,1
2,1,2	0,0,1
2,2,1	1,0,0
2,2,2	1,2,-2

Kooperativní hry N hráčů

Množina hráčů je tedy $Q = \{1, 2, 3\}$ a všechny možné koalice jsou

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Nejprve uvažujme koalici $K = \{1, 2\}$ a protikoalici $K^- = \{3\}$. Koalice K má čtyři společné strategie: (1,1), (1,2), (2,1), (2,2). Protikoalice má dvě ryzí strategie: 1,2. Zajímá-li nás, co je koalice K schopna pro sebe zajistit, uvažujeme dvoumaticovou hru. Hráči 1 a 2 tvoří koalici proti hráči 2, jejich zisk se tudíž sčítá.

strategie	1	2
(1,1)	-1,2	2,-1
(1,2)	-1,2	1,0
(2,1)	0,1	0,1
(2,2)	1,0	3,-2

Hra má Nashův rovnovážný bod v čistých strategiích: ((2,2),1)
s výplatami pro koalici K: 1 a pro protikoalici K^-: 0.

Tedy $v(\{1,2\}) = 1$ a $v(\{3\}) = 0$.

Obdobně postupujeme pro koalici $K = \{1,3\}$ a protikoalici $K^- = \{2\}$ a nakonec pro koalici $K = \{2,3\}$ a protikoalici $K^- = \{1\}$.

Zisk velké koalice je $v(\{1,2,3\}) = 1$ a zisk prázdné koalice $v(\emptyset) = 0$.

Tedy máme hru ve tvaru charakteristické funkce.:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= \frac{1}{4} \\ v(\{2\}) &= -\frac{1}{3} \\ v(\{3\}) &= 0 \\ v(\{1,2\}) &= 1 \\ v(\{1,3\}) &= \frac{4}{3} \\ v(\{2,3\}) &= \frac{3}{4} \\ v(\{1,2,3\}) &= 1 \\ v(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

Hra je podstatná. Charakteristická funkce je superaditivní.

Uvažujme imputace

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{b} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

Oba vektory jsou imputací dle definice. Zároveň **b** dominuje **a** pro koalici $\{1, 2\}$.

$$\mathbf{b} \succ_{\{1,2\}} \mathbf{a}$$

$\triangle$

Kooperativní hry N hráčů - typy řešení

Nyní se budeme věnovat konceptům řešení hry ve tvaru charakteristické funkce. Zajímá nás predikce racionálního chování hráčů. V kooperativních hrách s přenositelným užitkem je to i forma rozdělení zisku.

- Jádro hry
- Shapleyho hodnota
- Shapley-Shubikův index
- Banzhafův index
- Nukleolus

Za předpokladu superaditivity je velká koalice nejefektivnější provedení hry. Pak nás zajímá distribuce zisků.

Kooperativní hry N hráčů - jádro hry

Je zřejmé, že bude-li nějaká imputace dominována pro nějakou koalici jinou imputací, budou mít hráči této koalice snahu zrušit původní koalici a ustavit tuto výhodnější.

Definice

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. **Jádro hry** je tvořeno všemi imputacemi, které nejsou dominovány žádnou jinou imputací pro žádnou jinou koalici.

Tedy je to taková množina imputací, že každá případná koalice K obdrží alespoň $v(K)$, tzn. může obdržet víc. Je-li imputace $\mathbf{a}$ v jádru dané hry, nemá žádná skupina hráčů důvod vytvořit jinou koalici a nahradit $\mathbf{a}$ jinou imputací. Pokud je jádro prázdné, neexistuje stabilní kooperativní řešení, které by ustanovilo velkou koalici.

Kooperativní hry N hráčů - jádro hry

K usnadnění rozhodnutí, zda jistá imputace leží v jádru hry či nikoli, slouží následující věty.

Věta

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a nechť $\mathbf{a}$ je imputace. Potom $\mathbf{a}$ leží v jádru hry v právě tehdy, když

$$\sum_{i \in K} a_i \geq v(K)$$

pro každou koalici K.

Věta

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a nechť $\mathbf{a}$ je N-tice čísel. Potom $\mathbf{a}$ je imputace v jádru, právě když platí:

- $\sum_{i=1}^{N} a_i = v(Q)$
- $\sum_{i \in K} a_i \geq v(K)$ pro každou koalici K.

Tedy pokud bychom se vrátili k našemu příkladu:

$$
\begin{aligned}
v(\{1\}) &= \frac{1}{4}\\
v(\{2\}) &= -\frac{1}{3}\\
v(\{3\}) &= 0\\
v(\{1,2\}) &= 1\\
v(\{1,3\}) &= \frac{4}{3}\\
v(\{2,3\}) &= \frac{3}{4}\\
v(\{1,2,3\}) &= 1\\
v(\emptyset) &= 0
\end{aligned}
$$

Jádro hry musí splňovat

$$\begin{aligned} a_1 &\geq \frac{1}{4} \\ a_2 &\geq -\frac{1}{3} \\ a_3 &\geq 0 \\ a_1 + a_2 &\geq 1 \\ a_1 + a_3 &\geq \frac{4}{3} \\ a_2 + a_3 &\geq \frac{3}{4} \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \end{aligned}$$

Takový vektor $\mathbf{a}$, který splňuje všechny nerovnice, nenalezneme. Jádro hry je tedy prázdné.

Příklad

Uvažujme hru tří hráčů, každý hráč má zisk $v(\{i\}) = 1$, zisk velké koalice $v(Q) = 90$. Dále $v(\{1,2\}) = 50$, $v(\{1,3\}) = 20$, $v(\{2,3\}) = 10$.

Jádro hry je určeno:

$$\begin{aligned} a_1 &\geq 1 \\ a_2 &\geq 1 \\ a_3 &\geq 1 \\ a_1 + a_2 &\geq 50 \\ a_1 + a_3 &\geq 20 \\ a_2 + a_3 &\geq 10 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 90 \end{aligned}$$

Tedy v jádru hry je například imputace

$$(40, 30, 20).$$

$\triangle$

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Soustava pro výpočet jádra generovaná z charakteristické funkce z předchozího příkladu má nekonečně mnoho řešení. Potřebujeme zjemnění řešení, návod na výběr konkrétní imputace z jádra.

Nejvýznamnější koncept kooperativních her je Shapleyho hodnota

- cílem je modelovat přínos hráče $i \in K$ pro koalici K
- slouží pro přerozdělování zisku koalice
- hráč se zúčastní koalice při imputaci, která mu přinese jeho „spravedlivý“ podíl
- zkoumáme vliv neúčasti hráče v koalici

$$v(K) - v(K \backslash \{i\})$$

Koalice $K\backslash\{i\}$ má $k-1$ členů a lze tedy vytvořit

$$\binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

způsoby.

Zkoumáme střední hodnotu přínosu hráče i do všech možných k-členných koalic:

$$\begin{aligned} h_i(k) &= \sum_{K\subset Q, k=|K|, i\in K} \frac{v(K)-v(K\backslash\{i\})}{\binom{N-1}{k-1}} \\ &= \sum_{K\subset Q, k=|K|, i\in K} \frac{(k-1)!(N-k)!}{(N-1)!}(v(K)-v(K\backslash\{i\})) \end{aligned}$$

Kooperativní hry N hráčů - Shapleyho hodnota

Střední hodnota přínosu hráče i k úhrnu všech jednočlenných, dvoučlenných, . . ., N-členných koalic je dána vztahem

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K|-1)!(N-|K|)!}{N!}(v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Definice

Shapleyho vektor hry N hráčů ve tvaru charakteristické funkce je definován jako vektor

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_N),$$

jehož i-tá složka H_i je vypočtena předchozím vztahem. Složka H_i se nazývá **Shapleyho hodnota** pro hráče i.

Věta

Shapleyho vektor zadané hry je imputací ve hře.

Příklad

Máme hru tří hráčů s charakteristickou funkcí:

K	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(K)	100	10	0	150	110	20	200

Pak

$$\begin{array}{ccc} h_1(1) = 100 & h_2(1) = 10 & h_3(1) = 0 \\ h_1(2) = \frac{140+110}{2} & h_2(2) = \frac{50+20}{2} & h_3(2) = \frac{10+10}{2} \\ h_1(3) = 180 & h_2(3) = 90 & h_3(3) = 50 \end{array}$$

Celkem tedy $H_1 = \frac{100+125+180}{3} = 132$, $H_2 = 45$, $H_3 = 20$. Shapleyho vektor pro zadanou hru je

$$\mathbf{H} = (135, 45, 20)$$

$\triangle$

Shapleyho vektor má následující vlastnosti.

- individuální racionalita: $H_i \geq v(\{i\})$ pro všechny $i \in Q$
- efektivita: $\sum_{i \in Q} H_i = v(Q)$
- symetrie: pro každé dva hráče $i, j \in Q$, pro které platí $v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$ pro všechny $K \subseteq Q, i \notin K, j \notin K$ je $H_i = H_j$
- aditivita: pokud kombinujeme dvě hry v a w stejné struktury, pak platí, že $H_i(v) + H_i(w) = H_i(v + w)$
- nulový hráč nebere nic: pokud existuje hráč i takový, že $v(K \cup \{i\}) = v(K), \forall K \subset Q, i \notin K$, pak je $H_i = 0$

Vrátíme se ještě k předchozímu příkladu s charakteristickou funkcí $v(\{i\}) = 1$, $v(Q) = 90$, $v(\{1,2\}) = 50$, $v(\{1,3\}) = 20$, $v(\{2,3\}) = 10$.

Pak máme následující hodnoty

$$\begin{array}{ccc} h_1(1) = 1 & h_2(1) = 1 & h_3(1) = 1 \\ h_1(2) = \frac{49+19}{2} & h_2(2) = \frac{49+9}{2} & h_3(2) = \frac{19+9}{2} \\ h_1(3) = 80 & h_2(3) = 70 & h_3(3) = 40 \end{array}$$

Celkem tedy $H_1 = \frac{1+34+80}{3} = 38,3$, $H_2 = 33,3$, $H_3 = 18,3$.

Shapleyho vektor pro zadanou hru je

$$\mathbf{H} = (38,3; 33,3; 18,3)$$

$\triangle$

Děkuji za pozornost.