
Seminář řešení matematických více méně středoškolských úloh

Zadání úloh

1. 4. 2026

Zadání: Na kružnici je napsáno deset celých čísel

$$x_1, x_2, \dots, x_{10}$$

(indexy bereme modulo 10, tedy $x_{11} = x_1$ atd.). V jednom kroku si vybereme libovolné i a provedeme operaci

$$(x_i, x_{i+1}) \longrightarrow (x_i + 1, x_{i+1} - 1).$$

Tedy: u jednoho čísla přičteme 1 a u následujícího odečteme 1.

Dokažte, že z libovolných počátečních hodnot lze po konečném počtu kroků dosáhnout stavu

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{10}$$

právě tehdy, když je součet $x_1 + \dots + x_{10}$ dělitelný 10.

Zadání: Na louce jsou děti i dospělí. Počet procent chlapců ze všech dětí se rovná počtu procent dívek ze všech přítomných osob a také počtu všech dospělých. Kolik chlapců, dívek a dospělých je na louce.

Zadání: Necht' $*$ je asociativní operace na množině M . Necht' prvek $e \in M$ splňuje

- $e * a = a$ pro všechna $a \in M$
- pro všechna $a \in M$ existuje prvek $b \in M$ takový, že $b * a = e$.

Dokažte, že

- $a * e = a$ pro všechna $a \in M$
- pro všechna $a \in M$ existuje prvek $b \in M$ takový, že $b * a = e = a * b$.

Zadání: Necht' n je kladné celé číslo. Uvažme 3-rozměrný prostor $\mathbb{R}^3$. Pro body $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X = [x_1, x_2, x_3]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$, je jejich vzdálenost $d(X, Y)$ definována takto:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Necht' M je množina bodů prostoru $\mathbb{R}^3$. Řekneme, že M je *množina dvou vzdáleností*, pokud M má následující vlastnost: Existují dvě reálná čísla a, b taková, že pro každé dva body X, Y z množiny M je $d(X, Y) = a$ nebo $d(X, Y) = b$.

Dokažte, že každá množina dvou vzdáleností v $\mathbb{R}^3$ má nejvýše 14 prvků.