Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

6.3.2024

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Hry s nenulovým součtem

Hry s nenulovým/nekonstantním součtem

- V praxi se často setkáváme s konflikty, kdy účastníci rozhodnutí sledují své individuální zájmy, ale tyto zájmy nejsou nutně v přímém protikladu.
- Tento typ konfliktu označujeme jako neantagonistický konflikt, což znamená, že výhra jednoho účastníka nemusí automaticky znamenat prohru druhého.
- Budeme rozlišovat hry nekooperativní a hry kooperativní.
- **Kooperativní hry** - hráči mohou spolupracovat a domlouvat se na volbě svých strategií.
- **Nekooperativní hry** - hráči se musí rozhodovat nezávisle na ostatních.

Nekooperativní hry dvou hráčů s nenulovým součtem

- Matematický model konečné nekooperativní hry dvou hráčů je známý jako dvoumaticová hra.
- Hra je definována dvěma maticemi: **A** charakterizuje výplatní funkci prvního hráče a **B** charakterizuje výplatní funkci druhého hráče.
- Při výběru i-té strategie prvního hráče a j-té strategie druhého hráče je hodnota výplatní funkce prvního hráče rovna prvku a_{ij} a hodnota výplatní funkce druhého hráče rovna prvku b_{ij}.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Dominované strategie

U dvoumaticových her můžeme rovněž eliminovat zjevně nevýhodné, dominované strategie.

Definice

Strategie prvního hráče $x_i \in X$ se nazývá dominovaná jinou strategií $x_k \in X$, jestliže pro každou strategii druhého hráče $y \in Y$ platí

$$v_1(x_k, y) \geq v_1(x_i, y)$$

Analogicky pro druhého hráče.

V některých případech existují v dvoumatici dominované strategie. Po jejich vyškrtnutí můžeme buď získat jediný prvek, který představuje rovnovážný bod, nebo zbývající prvky nám poskytnou alespoň jednodušší dvoumaticovou hru.

Příklad

Uvažujme dvoumaticovou hru určenou dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 1;0 & 1;3 & 3;0 \\ 0;2 & 0;1 & 3;0 \\ 0;2 & 2;4 & 5;3 \end{pmatrix}$$

Pozorujeme, že strategie prvního hráče x_2 je dominovaná strategií x_3, protože pro každou strategii druhého hráče získá první hráč větší odměnu při volbě strategie x_3 než při volbě x_2.
Stejně tak strategie druhého hráče y_3 je dominovaná strategií y_2.
Vzhledem k této dominanci můžeme eliminovat tyto strategie, protože racionální hráči by je nikdy nevolili. Po odstranění dominovaných strategií získáme zjednodušenou dvoumaticovou hru:

$$\begin{pmatrix} 1;0 & 1;3 & . \\ . & . & . \\ 0;2 & 2;4 & . \end{pmatrix}$$

Příklad - pokračování

$$\begin{pmatrix} 1;0 & 1;3 & . \\ . & . & . \\ 0;2 & 2;4 & . \end{pmatrix}$$

Nyní je strategie y_1 dominovaná strategií y_2, druhý hráč tedy zvolí y_2. První hráč se nyní rozhoduje mezi hodnotami ve druhém sloupci dvoumatice a protože $1 < 2$, zvolí strategii x_3. Rovnovážný bod v dané hře je proto (x_3, y_2).

$$\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & 2;4 & . \end{pmatrix}$$

Nashovo rovnovážné řešení

Definice

Dvojici strategií x^0 a y^0 nazveme Nashovými rovnovážnými strategiemi, jestliže platí

$$v_1(x, y^0) \le v_1(x^0, y^0)$$

$$v_2(x^0, y) \le v_2(x^0, y^0)$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$.

Je zřejmé, že je-li (x^0, y^0) rovnovážný bod, pak pro $a_{ij} = v_1(x^0, y^0)$, $b_{ij} = v_2(x^0, y^0)$ platí:

- a_{ij} je největší prvek ve sloupci j matice $\mathbf{A}$

$$a_{ij} = \max_{1 \le k \le m} a_{kj}$$

- b_{ij} je největší prvek v řádku i matice $\mathbf{B}$

$$b_{ij} = \max_{1 \le k \le n} b_{ik}$$

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí (pro jednoduchost zapíšeme do jedné matice

$$\begin{pmatrix} 3;0 & 2;-1 \\ 1;1 & 3;-2 \end{pmatrix}$$

Hledáme maxima ve sloupci matice A a maxima v řádku matice B.

$$\begin{pmatrix} (3);[0] & 2,-1 \\ 1;[1] & (3);-2 \end{pmatrix}$$

Bod (x_1, y_1) je rovnovážným bodem. Pokud by druhý hráč zvolil strategii y_1 a první hráč se od strategie x_1 odchýlil, tj. zvolil by strategii x_2, pak by si pohoršil - získal by 1 místo 2. Obdobně pokud by první hráč zvolil strategii x_1 a druhý hráč se od y_1 odchýlil, pak by si pohoršil, prohrál by -1 místo 0.

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (7);[9] & -2;1 \\ -2;0 & (6);[4] \end{pmatrix}$$

Existují dvě rovnovážná řešení v ryzích strategiích. Hráči dají přednost rovnovážnému řešení s výplatami (7,9), které dominuje řešení s výplatami (6,4).

Definice

Nechť (x, y) je rovnovážný bod dvoumaticového hry pro který platí

$$v_1(x, y) \geq v_1(x^{'}, y^{'})$$

a zároveň

$$v_2(x, y) \geq v_1(x^{'}, y^{'})$$

pro libovolný rovnovážný bod $(x^{'}, y^{'})$ dané hry. Potom se (x, y) nazývá **dominujícím rovnovážným bodem**.

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (3); [9] & -2; 1 \\ -2; 0 & (6); [4] \end{pmatrix}$$

Existují dvě rovnovážná řešení v ryzích strategiích: bod (x_1, y_1) a bod (x_2, y_2). Nicméně, pokud první hráč zvolí druhý řádek (protože rovnovážné řešení na druhém řádku je pro něj výhodnější) a druhý hráč zvolí první sloupec (protože rovnovážné řešení v prvním sloupci je pro něj výhodnější), následky této volby jsou nepříznivé pro oba hráče, což vede k řešení s výplatami (-2, 0).

Příklad

Uvažujme hru určenou dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} 3; [5] & (2); -1 \\ (4); 1 & -2; [5] \end{pmatrix}$$

Hra nemá Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích.

Smíšené rozšíření dvoumaticové hry

- řešení, kdy používáme smíšené strategie, nazýváme smíšené rozšíření dvoumaticové hry
- prostory strategií pak opět představují vektory pravděpodobností

$$X = \{\mathbf{x}; \mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m], \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$Y = \{\mathbf{y}; \mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_n], \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq 0\}$$

- hodnota výplatní funkce prvního hráče udává očekávanou střední hodnotu výhry prvního hráče a hodnota výplatní funkce druhého hráče udává očekávanou střední hodnotu výhry druhého hráče

$$v_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\ \mathbf{y}$$

$$v_2(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{B}\ \mathbf{y}$$

Základní věta dvoumaticových her

Základní věta dvoumaticových her

Každá konečná dvoumaticová hra má aspoň jeden rovnovážný bod (x^0, y^0), tj. pro všechny smíšené strategie **x,y** platí

$$v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0) \leq v_1(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$$

$$v_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \leq v_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$$

Bohužel však Nashův důkaz věty neposkytuje efektivní algoritmus pro výpočet rovnovážného bodu v dvoumaticové hře. Proces hledání rovnovážného bodu je spojen s exponenciální složitostí, což znamená, že v praxi může být časově náročný a obtížný.

Řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování

Naším cílem je maximalizovat

$$\max_x \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{y}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

a maximalizovat

$$\max_y \mathbf{x}^T \mathbf{B}\mathbf{y}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$$\mathbf{y} \geq 0.$$

Řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování

Potom Nashův rovnovážný bod je strategie $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, pro kterou platí

$$\mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 = \max_x \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^0 | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$\mathbf{x}^{0T}\mathbf{B}\mathbf{y}^0 = \max_y \{\mathbf{x}^{0T}\mathbf{B}\mathbf{y} | \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq 0\}$$

Řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování

Věta (Mangasarian, Stone, 1964)

Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby bod (x^0, y^0) byl rovnovážným bodem uvedené hry, je to, že je řešením následujícího kvadratického programu:

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{y},\alpha,\beta} \mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y} - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{y} - \alpha\mathbf{e} &\leq \mathbf{0} \\
\mathbf{B}^T\mathbf{x} - \beta\mathbf{f} &\leq \mathbf{0} \\
\mathbf{e}^T\mathbf{x} &= 1 \\
\mathbf{f}^T\mathbf{y} &= 1 \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\
\mathbf{y} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování

e a **f** jsou vektory jedniček, α je výhra prvního hráče a β je výhra druhého hráče.
Hodnota účelové funkce je 0:

$$\mathbf{x}^{0\,T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y}^0 - \alpha^0 - \beta^0 = 0$$

Řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování - příklad

Uvažujme příklad, kde každý hráč má dvě strategie.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Spočteme

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Potom budeme řešit následující úlohu kvadratického programování:

Řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování - příklad

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{y},\alpha,\beta} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned}
2y_1 - y_2 - \alpha &\leq 0 \\
-y_1 + y_2 - \alpha &\leq 0 \\
x_1 - x_2 - \beta &\leq 0 \\
-x_1 + 2x_2 - \beta &\leq 0 \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
y_1 + y_2 &= 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Řešení dvoumaticové hry pomocí kvadratického programování - příklad

Řešení nalezneme pomocí software, řešení jsou tři, záleží na výchozích bodech.

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}'^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}''^0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \mathbf{y}''^0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Vzájemně nejlepší odpovědi

Dále si ukážeme možnost řešení pomocí nejlepších odpovědí.

Definice

Nejlepší odpovědí prvního hráče na strategii $\mathbf{y}$ druhého hráče se rozumí množina

$$BR_1(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}^0 \in X; \forall \mathbf{x} \in X \text{platí } v_1(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \geq v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}.$$

Analogicky nejlepší odpovědí druhého hráče na strategii $\mathbf{x}$ prvního hráče se rozumí množina

$$BR_2(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}^0 \in Y; \forall \mathbf{y} \in Y \text{platí } v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0) \geq v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}.$$

Vzájemně nejlepší odpovědi

Pak platí následující věta:

Věta

Strategie $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ tvoří rovnovážný bod právě tehdy, když

$$\mathbf{x}^0 \in BR_1(\mathbf{y}^0)$$

a zároveň

$$\mathbf{y}^0 \in BR_2(\mathbf{x}^0).$$

Hledáme-li rovnovážný bod, můžeme postupovat tak, že sestrojíme nejlepší odpovědi a nalezneme jejich průsečík.

Vzájemně nejlepší odpovědi

Nejprve si řekneme, co jsou očekávané hodnoty výhry.

Definice

Očekávané hodnoty výhry jsou definovány vztahy:
první hráč

$$v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$$

druhý hráč

$$v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j b_{ij}$$

Uvažujme předchozí příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a spočítejme očekávané hodnoty výhry.

Vzájemně nejlepší odpovědi - příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v_1(x_1, y_1) = x_1(5y_1 - 2) - 2y_1 + 1$$

$$v_2(x_1, y_1) = y_1(5x_1 - 3) - 3x_1 + 2$$

Nejprve hledáme nejlepší odpovědi prvního hráče na různé hodnoty y_1

- je-li $0 \leq y_1 < \frac{2}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry prvního hráče pro pevnou hodnotu y_1 lineární funkce klesající, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $x_1 = 0$
- je-li $y_1 = \frac{2}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry prvního hráče konstantní funkce, jakákoli hodnota x_1 je nejlepší odpovědí na tuto strategii druhého hráče
- a nakonec je-li $\frac{2}{5} < y_1 \leq 1$, pak je očekávaná hodnota výhry lineární funkce rostoucí, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $x_1 = 1$

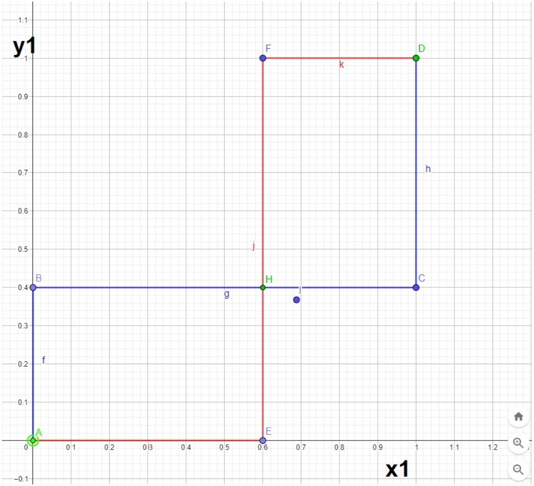
Vzájemně nejlepší odpovědi - příklad

Obdobně hledáme nejlepší odpovědi druhého hráče na různé hodnoty x_1

$$v_2(x_1, y_1) = y_1(5x_1 - 3) - 3x_1 + 2$$

- je-li $0 \leq x_1 < \frac{3}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry druhého hráče pro pevnou hodnotu x_1 lineární funkce klesající, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $y_1 = 0$
- je-li $x_1 = \frac{3}{5}$, pak je očekávaná hodnota výhry druhého hráče konstantní funkce, jakákoli hodnota y_1 je nejlepší odpovědí na tuto strategii prvního hráče
- je-li $\frac{3}{5} < x_1 \leq 1$, pak je očekávaná hodnota výhry lineární funkce rostoucí, tedy největší hodnoty bude nabývat pro $y_1 = 1$

Nyní si to zobrazíme do grafu:



Vzájemně nejlepší odpovědi - příklad

V grafu vidíme tři rovnovážné body stejné jako ty, které jsme získali řešení úlohy kvadratického programování:

$$\mathbf{x}'^{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}'^{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}''^{0} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \mathbf{y}''^{0} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problémy Nashovy rovnováhy - vězňovo dilema

Nashova rovnováha představuje jeden ze základních stavebních kamenů teorie her. Nicméně, může nás přivést k řešením, která vyvolávají určité obavy.

Jedním z nejznámějších modelových konfliktů je situace známá jako vězňovo dilema. V této hře jsou dva vězni, kteří spáchali určitý zločin, odděleně uvězněni a stojí před možností rozhodnout se mezi dvěma variantami: mlčet nebo se přiznat. Pokud oba vězni přiznají a svědčí proti sobě, oba dostanou trest 5 let. Jestliže se jeden přizná a druhý zůstane ticho, udavač bude osvobozen a druhý dostane výrazně vyšší trest, 8 let. V případě, že se oba vězni rozhodnou mlčet, nebudou plně usvědčeni a obdrží pouze 2 roky za menší přestupky. Hra vězňovo dilema může být například ve tvaru.

$$\begin{pmatrix} -2;-2 & -8;0 \\ 0;-8 & -5;-5 \end{pmatrix}$$

První strategie jsou mlčet a druhé strategie přiznat. Roky strávené ve vězení mají záporný užitek, tedy uvádíme záporná čísla.

Vězňovo dilema

Po nalezení řádkových a sloupcový maxim zjistíme, že ve hře existuje jediná Nashova rovnováha:

$$\begin{pmatrix} -2;-2 & -8;[0] \\ (0);-8 & (-5);[-5] \end{pmatrix}$$

Racionální hráči, kteří nemohou kooperovat, budou vždy volit strategii *přiznat*. Paradoxem je, že i když řešení (*mlčet, mlčet*) s výplatami (-2,-2) je lepší než rovnovážné řešení, neodpovídá podmínkám Nashovy rovnováhy. Tento paradox ukazuje, že zcela racionální hráči, kteří jednají ve svém nejlepším zájmu, mohou nakonec skončit v situaci, která je pro všechny nevýhodná. Tato hra poskytuje analogii s ekonomickou teorií, zejména při studiu chování nevynutitelných kartelových dohod.

Konflikt typu manželský spor

Dalším modelovým konfliktem je situace manželského sporu. Představme si, že manželé plánují trávit večer společně ve městě, ale každý z nich má odlišné preference. Manžel by nejraději sledoval sportovní utkání, zatímco manželka by dala přednost nákupům. Nyní jsou oba v práci a večer se mají setkat, přičemž každý se rozhoduje samostatně (předpokládejme). Tuto situaci můžeme znázornit pomocí dvoumaticové hry.

$$\begin{pmatrix} 2;1 & -1;-1 \\ -1;-1 & 1;2 \end{pmatrix}$$

Jedná se o modelový příklad, který jsme před chvíli diskutovali. Problém spočívá v existenci více rovnovážných řešení, z nichž žádné není dominující, a tudíž hráči nemají jasno, které řešení zvolit. Pokud manžel zvolí první řádek (sportovní utkání) a manželka druhý sloupec (nákupy), řešením bude bod (-1, -1), který není rovnovážným bodem a není výhodný pro žádného z hráčů.

Konflikt typu kuře

V konfliktu typu kuře, který si můžeme představit jako souboj dvou firem působících ve stejné oblasti, obě usilují o zdvojnásobení své těžby. Existují dvě možná rozhodnutí: buď ustoupit od svého záměru a zůstat při stávajícím rozsahu těžby, nebo neustoupit. V případě, že obě firmy ustoupí, situace se nezmění. Jestliže jedna firma ustoupí a druhá nikoli, ta ustupující si zhorší svou pozici, zatímco ta neustupující si ji zlepší. Pokud však žádná firma neustoupí, dojde k ekologické katastrofě, která bude mít negativní důsledky pro obě firmy. Tuto situaci lze ilustrovat pomocí dvoumaticové hry.

$$\begin{pmatrix} 0;0 & (-5);[5] \\ (5);[-5] & -100;-100 \end{pmatrix}$$

Tato hra má dvě ryzí rovnovážné strategie - (ustoupit, neustoupit) a (neustoupit, ustoupit). Pokud hráči každý zvolí pro sebe výhodnější bod, dostanou se do situace (neustoupit, neustoupit), která je pro všechny nevýhodná.

Problémy Nashovy rovnováhy

- Konflikty typu kuře a manželský spor poukazují na problém vícenásobné Nashovy rovnováhy.
- V případě existence více rovnovážných řešení, z nichž alespoň dvě jsou nedominovaná, hráči čelí nejistotě ohledně toho, jaké řešení zvolit.
- pPokud každý hráč volí rozhodnutí, které je pro něj výhodnější, může dojít k situaci, kde se hráči nacházejí mimo rámec Nashovy rovnováhy.
- Koncept Nashovy rovnováhy v těchto situacích neposkytuje jednoznačný návod k výběru optimálního rozhodnutí, což může vést k nejistotě a obtížím při strategickém rozhodování.

Děkuji za pozornost.