

Algebra I – úlohy k procvičení – 14.10.2020

1. Nechť G je grupa, ve které $(ab)^2 = a^2b^2$ pro všechna $a, b \in G$. Dokažte, že grupa G je komutativní.
2. Nechť G je konečná neprázdná množina s asociativní operací $*$. Nechť pro všechna $a, x, y \in G$ platí:
 - jestliže $a * x = a * y$, pak $x = y$
 - jestliže $x * a = y * a$, pak $x = y$

Dokažte, že množina G spolu s operací $*$ je grupa.

3. Uveďte příklad neprázdné množiny A s operací $*$ tak, aby současně platilo:
 - operace $*$ je asociativní
 - pro všechna $a, x, y \in A$ platí: jestliže $a * x = a * y$, pak $x = y$
 - pro všechna $a, x, y \in A$ platí: jestliže $x * a = y * a$, pak $x = y$
 - A spolu s operací $*$ není grupa
4. (a) Najděte všechny prvky řádu 3 v grupě \mathbb{C} (s operací sčítání).
(b) Najděte všechny prvky řádu 3 v grupě \mathbb{C}^\times (s operací násobení).
5. Nechť G je konečná grupa. Dokažte, že existuje kladné celé číslo k splňující

$$a^k = 1$$

pro všechna $a \in G$.