Teoretická aritmetika – úlohy k procvičení – 26.10.2020 – řešení

1. Vypočtěte
$$(BACA)_{16} - (B0B)_{16}$$
Výsledek zapište v soustavě se základem 16.

Řešení. Položme $x = (BACA)_{16}$ a $y = (B0B)_{16}$. Nechť $\overline{y}$ je 4-ciferný 15-doplněk čísla y, tedy $\overline{y} = (F4F4)_{16}$.

$$\begin{array}{ccccc} & B & A & C & A \\ & F & 4 & F & 4 \\ \hline 1 & A & F & B & E \end{array}$$

$x + \overline{y} = (1AFBE)_{16}$, takže $x - y = (AFBF)_{16}$

2. Vypočtěte
$$(BABA)_{12} \cdot (ABBA)_{12} \cdot (B0B0)_{12}$$
Výsledek zapište v soustavě se základem 12.

Řešení.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & B & A & B & A \\ & & & \times & A & B & B & A \\ \hline & & & 9 & B & 1 & A & 4 \\ & & A & B & 0 & A & 2 & \\ & A & B & 0 & A & 2 & & \\ 9 & B & 1 & A & 4 & & & \\ \hline A & B & 0 & 8 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

Je tedy
$$(BABA)_{12} \cdot (ABBA)_{12} = (AB082204)_{12}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & A & B & 0 & 8 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ & & & & & & & \times & B & 0 & B & 0 \\ \hline & & A & 0 & 1 & 7 & 5 & B & A & 3 & 8 & 0 \\ A & 0 & 1 & 7 & 5 & B & A & 3 & 8 & 0 & & \\ \hline A & 0 & B & 7 & 7 & 7 & 4 & 3 & 6 & 3 & 8 & 0 \end{array}$$

Je tedy

$$(AB082204)_{12} \cdot (B0B0)_{12} = (A0B777436380)_{12}$$

Závěr:

$$(BABA)_{12} \cdot (ABBA)_{12} \cdot (B0B0)_{12} = (A0B777436380)_{12}$$

3. Najděte všechna aspoň dvojciferná kladná celá čísla s počáteční číslicí 6, která mají následující vlastnost:

   Jestliže první číslice je smazána, pak výsledné číslo je redukováno na $\frac{1}{25}$ původní hodnoty.

Řešení. Hledané číslo označme x.

Nechť $x = (6a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$; je $n \geq 1$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned}
(a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10} &= \frac{x}{25} \\
x - 6 \cdot 10^n &= \frac{x}{25} \\
25x - 25 \cdot 6 \cdot 10^n &= x \\
24x &= 25 \cdot 6 \cdot 10^n \\
4x &= 25 \cdot 10^n \\
2^2 \cdot x &= 5^2 \cdot 2^n \cdot 5^n
\end{aligned}$$

Uvažme nejprve případ, kdy $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
2^2 \cdot x &= 5^2 \cdot 2^n \cdot 5^n \\
x &= 2^{n-2} \cdot 5^{n+2} \\
x &= 5^4 \cdot 2^{n-2} \cdot 5^{n-2} \\
x &= 625 \cdot 10^{n-2}
\end{aligned}$$

Nechť nyní $n = 1$:

$$\begin{aligned}
2^2 \cdot x &= 5^2 \cdot 2^1 \cdot 5^1 \\
2x &= 5^3 \\
2x &= 125
\end{aligned}$$

– to nelze (na levé straně je sudé celé číslo, na pravé straně je liché celé číslo).

Závěr:

Hledanými čísly jsou právě čísla $625 \cdot 10^k$, kde k je celé číslo, $k \geq 0$.

4. Neexistuje žádné aspoň dvojciferné kladné celé číslo takové, že po smazání první číslice bude výsledné číslo rovno $\frac{1}{35}$ původního čísla.

   Dokažte.

   Řešení. Sporem. Předpokládejme: x je aspoň dvojciferné kladné celé číslo takové, že po smazání první číslice bude výsledné číslo rovno $\frac{1}{35}$ původního čísla.

   Nechť $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$; je $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{Z}$), $a_n \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
(a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10} &= \frac{x}{35} \\
x - a_n \cdot 10^n &= \frac{x}{35} \\
35x - 35 \cdot a_n \cdot 10^n &= x \\
34x &= 35 \cdot a_n \cdot 10^n \\
2 \cdot 17 \cdot x &= 5 \cdot 7 \cdot a_n \cdot 10^n
\end{aligned}
$$

   Číslo 17 je prvočíslo, takže $17|5$ nebo $17|7$ nebo $17|a_n$ nebo $17|10$.

   Ovšem $\neg(17|5)$, $\neg(17|7)$, $\neg(17|10)$, takže $17|a_n$. Je $a_n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takže 17 dělí některé z čísel $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. To je spor.

5. Najděte všechna aspoň dvojciferná kladná celá čísla x, která mají následující vlastnost:

   Jestliže je smazána poslední číslice čísla x, pak číslo x je dělitelné nově vzniklým číslem.

   Řešení. Hledané číslo označme x. Je $x = (a_n \dots a_1 a_0)_{10}$, n je celé číslo, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $(a_n \dots a_1)_{10} | x$.

   Dále
$$x = (a_n \dots a_1 a_0)_{10} = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

   Pak
$$x - a_0 = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10$$

   a
$$x - a_0 = 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1) = 10 \cdot (a_n \dots a_1)_{10}$$

   Položme $y = (a_n \dots a_1)_{10}$. Číslo y je celé, $y > 0$. Máme
$$x - a_0 = 10y, \; x = 10y + a_0$$

Víme, že $y|x$, takže $x = ky$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}^+$.

$$\begin{aligned} ky &= 10y + a_0 \\ ky - 10y &= a_0 \\ (k-10) \cdot y &= a_0 \end{aligned}$$

Je $a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Probereme všech 10 případů.

$\underline{a_0 = 0}$:

$x = 10y$ ($y \in \mathbb{Z}$, $y > 0$)

$\underline{a_0 = 1}$:

Je 1 možnost: $k - 10 = 1$, $y = 1$, tj. $k = 11$, $y = 1$ a dostáváme

$x = 11$

$\underline{a_0 = 2}$:

Jsou 2 možnosti:

- $k - 10 = 1$, $y = 2$: $k = 11$
  $x = 22$
- $k - 10 = 2$, $y = 1$: $k = 12$
  $x = 12$

$\underline{a_0 = 3}$:

Jsou 2 možnosti:

- $k - 10 = 1$, $y = 3$: $k = 11$
  $x = 33$
- $k - 10 = 3$, $y = 1$: $k = 13$
  $x = 13$

$\underline{a_0 = 4}$:

Jsou 3 možnosti:

- $k - 10 = 1$, $y = 4$: $k = 11$
  $x = 44$
- $k - 10 = 2$, $y = 2$: $k = 12$
  $x = 24$

- $k-10=4$, $y=1$: $k=14$
  $x=14$

<u>$a_0=5$</u>:
Jsou 2 možnosti:

- $k-10=1$, $y=5$: $k=11$
  $x=55$
- $k-10=5$, $y=1$: $k=15$
  $x=15$

<u>$a_0=6$</u>:
Jsou 4 možnosti:

- $k-10=1$, $y=6$: $k=11$
  $x=66$
- $k-10=2$, $y=3$: $k=12$
  $x=36$
- $k-10=3$, $y=2$: $k=13$
  $x=26$
- $k-10=6$, $y=1$: $k=16$
  $x=16$

<u>$a_0=7$</u>:
Jsou 2 možnosti:

- $k-10=1$, $y=7$: $k=11$
  $x=77$
- $k-10=7$, $y=1$: $k=17$
  $x=17$

<u>$a_0=8$</u>:
Jsou 4 možnosti:

- $k-10=1$, $y=8$: $k=11$
  $x=88$
- $k-10=2$, $y=4$: $k=12$
  $x=48$

- $k-10=4$, $y=2$: $k=14$
  $x=28$
- $k-10=8$, $y=1$: $k=18$
  $x=18$

$\underline{a_0=9}$:
Jsou 3 možnosti:

- $k-10=1$, $y=9$: $k=11$
  $x=99$
- $k-10=3$, $y=3$: $k=13$
  $x=39$
- $k-10=9$, $y=1$: $k=19$
  $x=19$

Soupis všech hledaných čísel:

$10y$, kde y je kladné celé číslo

$11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,$

$22, 24, 26, 28,$

$33, 36, 39,$

$44, 48,$

$55, 66, 77, 88, 99$