Zadání úloh

1. Kolikrát déle poběží můj algoritmus pro dvojnásobně velký vstup, když

$$C(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

   (a) Řešte nejprve pro $c_{\text{op}} = 1$ ms, $n = 10^3$, $n = 10^6$ a $n = 10^9$

   (b) Obecně.

   (c) Poznámky: $C(n)$ je počet základních operací, c_{op} doba vykonání jedné základní operace

2. Jsou dány následující funkce:

$$n, n^2, 2^n, n^3, \log_2 n, n \cdot \log_2 n, n!$$

   (a) Seřaďte tyto funkce dle rychlosti růstu.

   (b) Určete hodnoty funkcí pro $n \in \{1, 10, 10^2, 10^3\}$.

   (c) Kolikrát déle poběží můj algoritmus, jestliže se zdvojnásobí vstup u dané funkce?

3. Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá. Vždy zdůvodněte.

   (a) $3n + 7 \in O(n)$

   (b) $n \in O(3n + 7)$

   (c) $n \in \Omega(3n + 7)$

   (d) $3n + 7 \in O(n^2)$

   (e) $n^2 \in O(3n + 7)$

   (f) $n^2 \in \Omega(3n + 7)$

   (g) $100n + 5 \in O(3n + 7)$

   (h) $1000n + 5 \in O(\log_2 n)$

   (i) $n^2 \in O(100n)$

   (j) $n^2 \in \Omega(100n)$

   (k) $\frac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$

   (l) $3n^5 - 16n^3 + 2n \in \Omega(n^5)$

   (m) $\frac{1}{2}n + 2n \in O(n^2 - 4n + 7)$

4. Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá. Vždy zdůvodněte.

   (a) $\log n \in O(2^{n-1} - 2)$

   (b) $2^{n-1} - 2 \in O(\log_2 n)$

   (c) $\log n \in O(\sqrt{n})$

   (d) $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$

   (e) $n! \in O(2^n)$ (*Vyjádřete si jinak funkci $n!$, abyste s ní mohli pracovat.*)

   (f) $2^n \in O(n!)$ (*Vyjádřete si jinak funkci $n!$, abyste s ní mohli pracovat.*)

(g) $n^n \in O(n!)$

5. Seřaďte funkce dle růstu rychlosti:

$$n^2 + \log n; \quad 7n^5 - n^3 + n; \quad n^2; \quad \log(\log n); \quad 2^n;$$
$$\log n; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n; \quad n \log n; \quad n!;$$
$$n; n^n; \quad 6; \log(n!); \quad (\log n)^2; \quad \sqrt{n}; \quad \sqrt{\log n};$$
$$\mathrm{e}^n; \quad 2^{\log n}; \quad 2^{2^n}$$

6. Pro každé kladné celé číslo k a reálné číslo b, $b > 1$, je

$$n^k \in O(b^n).$$

Dokažte.

7. Najděte funkce $f(n)$ a $g(n)$ takové, že neplatí žádný ze vztahů $f(n) \in O(g(n))$ a $g(n) \in O(f(n))$.

8. Určete O- odhad pro

$$\sum_{1 \leq j \leq n} j(j+1)(j+2).$$

9. Nechť k je kladné celé číslo. Ukažte, že

$$\sum_{1 \leq i \leq n} i^k = \Theta(n^{k+1}).$$

10. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

$$\sqrt{\log_2 n + 2} \in \Omega(\log_2(\log_2 n)).$$