KMA/KMU1 Axiomatická výstavba geometrie – domácí úkoly

1. Vyslovte **Saccheriho – Legendreovu větu**.

2. Popište **Poincarého polorovinový model Lobačevského geometrie**. Definujte

   - body
   - přímky
   - incidenci
   - uspořádání bodů
   - délku úseček
   - shodnost úseček

   Dokažte, že model splňuje axiom **L**:

   Pro libovolnou přímku p a libovolný bod B neležící na přímce p existují aspoň dvě přímky q_1, q_2, $q_1 \neq q_2$, procházející bodem B a rovnoběžné s přímkou p.

3. **Tarského axiomatizace geometrie (TAG)**:

   A1 $\forall x \forall y [B(xyx) \to (x = y)]$

   A2 $\forall x \forall y \forall z \forall u [B(xyu) \wedge B(yzu) \to B(xyz)]$

   A3 $\forall x \forall y \forall z \forall u [B(xyz) \wedge B(xyu) \wedge (x \neq y) \to B(xzu) \vee B(xuz)]$

   A4 $\forall x \forall y [D(xyyx)]$

   A5 $\forall x \forall y \forall z [D(xyzz) \to (x = y)]$

   A6 $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [D(xyzu) \wedge D(xyvw) \to D(zuvw)]$

A7 $\forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v [B(xtu) \wedge B(yuz) \to B(xvy) \wedge B(ztv)]$

A8 $\forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v \exists w [B(xut) \wedge B(yuz) \wedge (x \neq u) \to B(xzv) \wedge B(xyw) \wedge B(vtw)]$

A9 $\forall x \forall x' \forall y \forall y' \forall z \forall z' \forall u \forall u' [D(xyx'y') \wedge D(yzy'z') \wedge D(xux'u') \wedge D(yuy'u') \wedge B(xyz) \wedge B(x'y'z') \wedge (x \neq y) \to D(zuz'u')]$

A10 $\forall x \forall y \forall u \forall v \exists z [B(xyz) \wedge D(yzuv)]$

A11 $\exists x \exists y \exists z [\neg B(xyz) \wedge \neg B(yzx) \wedge \neg B(zxy)]$

A12 $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v [D(xuxv) \wedge D(yuyv) \wedge D(zuzv) \wedge (u \neq v) \to B(xyz) \vee B(yzx) \vee B(zxy)]$

A13 Nechť φ je formule, která neobsahuje žádný volný výskyt proměnných y, z, u, a ψ je formule, která neobsahuje žádný volný výskyt proměnných x, z, u. Pak je axiomem univerzální uzávěr formule

$$\exists z \forall x \forall y [\varphi \wedge \psi \to B(zxy)] \to \exists u \forall x \forall y [\varphi \wedge \psi \to B(xuy)]$$

Proměnné označují body, $B(xyz)$ znamená, že y leží mezi x a z (případy, kdy y je x nebo y je z nejsou vyloučeny), $D(xyzu)$ znamená, že vzdálenost x od y je rovna vzdálenosti z od u.

Každý axiom má intuitivní význam, například A11 říká, že existují tři nekolineární body, tedy prostor má dimenzi aspoň dva.

- Vysvětlete intuitivní význam axiomu A10.
- Vysvětlete intuitivní význam axiomu A12.

4. V TAG dokažte:

- $\forall x \forall y B(xyy)$
- $\forall x \forall y \forall z [B(xyz) \to B(zyx)]$