

Lineární algebra

studijní text

Martin Kuřil

- Kapitola 1 – Základní matematické pojmy
- Kapitola 2 – Obecná teorie vektorových prostorů
- Kapitola 3 – Vektorové prostory konečné dimenze
- Kapitola 4 – Euklidovské prostory
- Kapitola 5 – Matice (nad tělesem)
- Kapitola 6 – Symetrické grupy
- Kapitola 7 – Determinanty
- Kapitola 8 – Aplikace probrané teorie

Ústí nad Labem 2019

Studijní materiál byl vytvořen v rámci projektu Univerzita 21. století – Kvalitní, moderní a otevřená instituce, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002408 (KA02 Podpora a rozvoj polytechnických studijních programů).



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Lineární algebra

Kapitola 1 - Základní matematické pojmy

1.1 Relace a funkce

V celém textu budeme používat následující označení pro číselné množiny:

$\mathbb{N}$... množina všech přirozených čísel bez nuly, $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0$... množina všech přirozených čísel s nulou, $\mathbb{N}_0=\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$... množina všech celých čísel, $\mathbb{Z}=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$... množina všech racionálních čísel

$\mathbb{R}$... množina všech reálných čísel

$\mathbb{C}$... množina všech komplexních čísel

1.1.1 DEFINICE

Nechť A, B jsou množiny. Kartézský součin $A \times B$ množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a \in A, b \in B$. Tedy $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Každá podmnožina množiny $A \times B$ se nazývá (binární) relace z množiny A do množiny B . V případě $A = B$ hovoříme o relaci na množině A .

1.1.2 DEFINICE

Nechť A, B, C jsou množiny, $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$. Definujeme

(a) Definiční obor $Def R$ relace R jako $Def R = \{a \in A | \text{existuje } b \in B \text{ tak, že } aRb\}$.

(Zde i v dalším textu píšeme aRb často místo $(a, b) \in R$.)

(b) Obor hodnot $Im R$ relace R jako $Im R = \{b \in B | \text{existuje } a \in A \text{ tak, že } aRb\}$

(c) inverzní relaci R^{-1} k relaci R jako $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in R\}$

(d) složení RS relací R a S jako $RS = \{(a, c) \in A \times C | \text{existuje } b \in B \text{ tak, že } aRb \text{ a } bSc\}$

1.1.3 TVRZENÍ

Nechť A, B, C, D jsou množiny, $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq C \times D$. Platí:

(a) $(RS)T = R(ST)$ (skládání relací je asociativní)

(b) $(R^{-1})^{-1} = R$

(c) $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$

Důkaz:

(a) Nechť $a \in A, d \in D$. Pak

$a((RS)T)d \Leftrightarrow \text{existuje } c \in C : a(RS)c, cTd$

$\Leftrightarrow \text{existuje } c \in C, \text{ existuje } b \in B : aRb, bSc, cTd$

$\Leftrightarrow \text{existuje } b \in B : aRb, b(ST)d$.

$\Leftrightarrow a(R(ST))d$.

Závěr: $(RS)T = R(ST)$.

(b) SAMI

(c) Nechť $c \in C, a \in A$. Pak

$c((RS)^{-1})a \Leftrightarrow a(RS)c$

$\Leftrightarrow \text{existuje } b \in B : aRb, bSc$

$\Leftrightarrow \text{existuje } b \in B : cS^{-1}b, bR^{-1}a$

$\Leftrightarrow c(S^{-1}R^{-1})a$.

Závěr: $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.

1.1.4 DEFINICE

Nechť A, B jsou množiny, $F \subseteq A \times B$. Relace F se nazývá parciální funkce (částečné zobrazení) z množiny A do množiny B , pokud pro všechna $a \in B, b_1, b_2 \in B$ platí:

Jestliže $a F b_1$, $a F b_2$, pak $b_1 = b_2$. $a F b$ zapisujeme často ve tvaru $F(a) = b$.
 Pokud navíc $\text{Def } F = A$, pak F nazýváme totální funkce (úplné zobrazení) množiny A do množiny B . Tuto skutečnost vyjadřujeme zápisem $F: A \rightarrow B$. Místo totální funkce (úplné zobrazení) říkáme někdy pouze funkce (zobrazení).

1.1.5 TVRZENÍ

(a) Složení parciálních funkcí je parciální funkce.

(b) Složení totálních funkcí je totální funkce.

Důkaz:

(a) Necht' A, B, C jsou množiny, $F \subseteq A \times B$, $G \subseteq B \times C$, F a G jsou parciální funkce.

Necht' $a \in A$, $c_1, c_2 \in C$, $a(FG)c_1$, $a(FG)c_2$.

chceme: $c_1 = c_2$.

$a(FG)c_1 \Leftrightarrow$ existuje $b_1 \in B$: $a F b_1$, $b_1 G c_1$.

$a(FG)c_2 \Leftrightarrow$ existuje $b_2 \in B$: $a F b_2$, $b_2 G c_2$.

Vidíme, že $a F b_1$, $a F b_2$. Jelikož F je parciální funkce, je $b_1 = b_2$. Označme $b = b_1 = b_2$.

Pak $b G c_1$, $b G c_2$. Jelikož G je parciální funkce, je $c_1 = c_2$.

(b) Necht' A, B, C jsou množiny, $F: A \rightarrow B$, $G: B \rightarrow C$. Dle části (a) již víme, že FG je parciální funkce. Zbývá tedy dokázat, že $\text{Def}(FG) = A$.

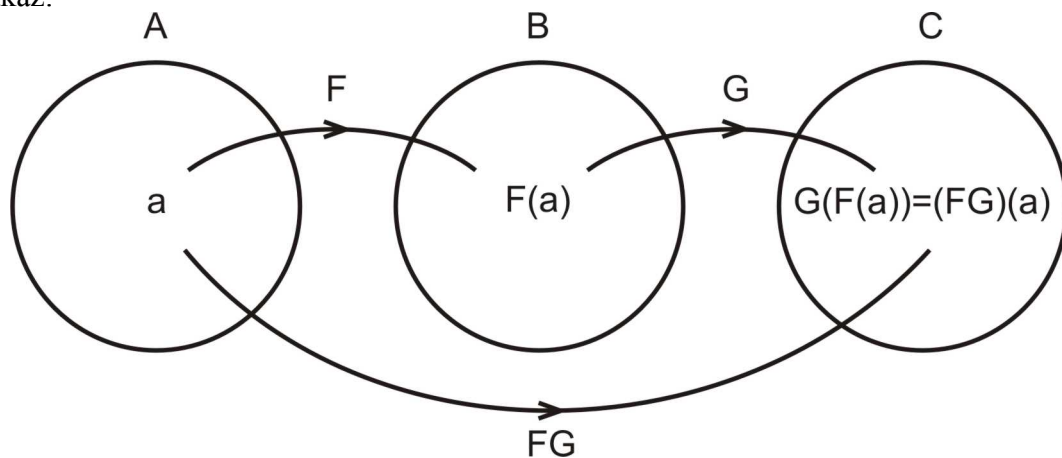
$\text{Def}(FG) \subseteq A$: to je zřejmé.

$A \subseteq \text{Def}(FG)$: Necht' $a \in A$. Víme, že $\text{Def } F = A$. Existuje tedy $b \in B$ tak, že $a F b$. Víme také, že $\text{Def } G = B$. Tudíž $b \in \text{Def } G$ a existuje $c \in C$, tak, že $b G c$. Potom $a(FG)c$, $a \in \text{Def}(FG)$.

1.1.6 TVRZENÍ

Necht' $F: A \rightarrow B$, $G: B \rightarrow C$, $a \in A$. Pak $(FG)(a) = G(F(a))$.

Důkaz:



Víme: $(a, F(a)) \in F$, $(F(a), G(F(a))) \in G$. Tudíž $(a, G(F(a))) \in FG$ což zapisujeme (dle 1.1.4.) ve tvaru $(FG)(a) = G(F(a))$.

1.1.7 DEFINICE

Necht' $F: A \rightarrow B$. Funkce F se nazývá

(a) injekce (injektivní, prostá), pokud po všechna $a_1, a_2 \in A$ platí:

Jestliže $a_1 \neq a_2$, pak $F(a_1) \neq F(a_2)$. (Ekvivalentně: Jestliže $F(a_1) = F(a_2)$, pak $a_1 = a_2$.)

(b) surjekce (surjektivní, na), pokud platí:

Pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ tak, že $F(a) = b$. (Ekvivalentně: $\text{Im } F = B$.)

(c) bijekce (bijektivní, vzájemně jednoznačná), pokud je injekce a surjekce současně.

1.1.8 TVRZENÍ

- (a) Složení injekcí je injekce.
- (b) Složení surjekcí je surjekce.
- (c) Složení bijekcí je bijekce.
- (d) Inverzní relace k bijekci je bijekce.

Důkaz:

- (a) Necht' $F: A \rightarrow B$, $G: B \rightarrow C$, F , G jsou injekce. Necht' $a_1, a_2 \in A$, $(FG)(a_1) = (FG)(a_2)$. Chceme: $a_1 = a_2$. Víme, že $G(F(a_1)) = G(F(a_2))$. Jelikož G je injekce, máme $F(a_1) = F(a_2)$. Jelikož F je injekce, máme $a_1 = a_2$.
- (b) Necht' $F: A \rightarrow B$, $G: B \rightarrow C$, F , G jsou surjekce. Necht' $c \in C$. Hledáme $a \in A$ tak, aby $(FG)(a) = c$. Jelikož G je surjekce, existuje $b \in B$ tak, že $G(b) = c$. Jelikož F je surjekce, existuje $a \in A$ tak, že $F(a) = b$. Pak $(FG)(a) = G(F(a)) = G(b) = c$.
- (c) Tvzení ihned plyne z (a) a (b).
- (d) Necht' $F: A \rightarrow B$ je bijekce. Je $F^{-1} \subseteq B \times A$. Nejdříve ukážeme, že F^{-1} je parciální funkce: Necht' $b \in B$, $a_1, a_2 \in A$, $b F^{-1} a_1$, $b F^{-1} a_2$. Chceme: $a_1 = a_2$. Víme, že $a_1 F b$, $a_2 F b$, tedy $F(a_1) = b$, $F(a_2) = b$, $F(a_1) = F(a_2)$. Protože F je injekce, nutně $a_1 = a_2$. Nyní ukážeme, že $\text{Def } F^{-1} = B$.

$\text{Def } F^{-1} \subseteq B$: To je zřejmé.

$B \subseteq \text{Def } F^{-1}$: Bud' $b \in B$. Protože F je surjekce, existuje $a \in A$ tak, že $F(a) = b$. Tudíž $a F b$, $b F^{-1} a$, $b \in \text{Def } F^{-1}$.

Již jsme dokázali, že $F^{-1}: B \rightarrow A$. Zbývá dokázat, že F^{-1} je bijekce.

F^{-1} je injekce:

Necht' $b_1, b_2 \in B$, $F^{-1}(b_1) = F^{-1}(b_2)$. Chceme: $b_1 = b_2$. Budiž $a \in A$, $a = F^{-1}(b_1) = F^{-1}(b_2)$. Takže $b_1 F^{-1} a$, $b_2 F^{-1} a$, $a F b_1$, $a F b_2$. Jelikož F je funkce, dostáváme $b_1 = b_2$.

F^{-1} je surjekce:

Necht' $a \in A$. Hledáme $b \in B$ tak, aby $F^{-1}(b) = a$. Hledáme tedy takové $b \in B$, aby $b F^{-1} a$, čili $a F b$. Takové b existuje, neboť F je funkce a tudíž $\text{Def } F = A$.

1.1.9 DEFINICE

Necht' A je množina. Funkce $\text{id}_A: A \rightarrow A$ definovaná předpisem $\text{id}_A(a) = a$ pro všechna $a \in A$ se nazývá identita (identická funkce) na množině A .

1.1.10 TVRZENÍ

Necht' A, B jsou množiny, $F: A \rightarrow B$. Platí:

- (a) Funkce id_A je bijekce
- (b) $\text{id}_A F = F \text{id}_B = F$
- (c) $FF^{-1} = \text{id}_B$, $F^{-1}F = \text{id}_A$ (za předpokladu, že F je bijekce.)

Důkaz: SAMI

1.2 Operace na množině

1.2.1 DEFINICE

Necht' A je množina. Zobrazení množiny $A \times A$ do množiny A se nazývá (binární) operace na množině A . Je-li $*$ operace na A , pak místo $*((x, y))$ píšeme $x * y$ (pro všechna $x, y \in A$).

1.2.2 DEFINICE

Necht' $*$ a $\square$ jsou binární operace na množině A .

(a) Říkáme že operace $*$ je asociativní, pokud pro všechna $x, y, z \in A$ platí:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

(b) Říkáme, že operace $*$ je komutativní, pokud pro všechna $x, y \in A$ platí:

$$x * y = y * x$$

(c) Říkáme, že operace $\square$ je distributivní vzhledem k operaci $*$ pokud pro všechna $x, y, z \in A$ platí:

$$x \square (y * z) = (x \square y) * (x \square z), \quad (y * z) \square x = (y \square x) * (z \square x).$$

(d) Necht' $e \in A$. Říkáme, že e je neutrální prvek operace $*$, pokud pro všechna $x \in A$ platí:
 $e * x = x, \quad x * e = x$.

(e) Necht' $e, x, y \in A$, e je neutrální prvek operace $*$. Říkáme, že prvek y je inverzní (inverze) k prvku x vzhledem k operaci $*$, pokud platí: $x * y = e, \quad y * x = e$.

1.2.3 TVRZENÍ

(a) Každá operace má nejvýše jeden neutrální prvek.

(b) Pro každou asociativní operaci s neutrálním prvkem platí:

Ke každému prvku existuje nejvýše jeden prvek inverzní.

Důkaz:

(a) Necht' $*$ je operace na množině A . Necht' e_1, e_2 jsou neutrální prvky operace $*$.

Chceme: $e_1 = e_2$

Počítejme: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ (první rovnost plyne z toho, že e_2 je neutrální, druhá rovnost plyne z toho, že e_1 je neutrální)

(b) Necht' $*$ je asociativní operace na množině A s neutrálním prvkem e . Necht'

$x, y_1, y_2 \in A$, y_1 a y_2 jsou inverze k x . Chceme: $y_1 = y_2$. Počítejme:

$$y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2.$$

V případě binárních operací se velmi často používá multiplikativní nebo aditivní symbolika.

Multiplikativní symbolika:

Operace se značí $\cdot$ a nazývá se násobení. Neutrální prvek se značí 1 a nazývá se jednotkový prvek. Inverzní prvek k prvku x se značí x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$.

Aditivní symbolika:

Používá se především pro komutativní operace. Operace se značí $+$ a nazývá se sčítání. Neutrální prvek se značí 0 a nazývá se nulový prvek. Inverzní prvek k prvku x se značí $-x$ a nazývá se opačný prvek k prvku x .

1.2.4 DEFINICE

Grupa je množina spolu s binární operací, jež je asociativní, má neutrální prvek a každý prvek má prvek inverzní.

1.2.5 TVRZENÍ

Necht' G je grupa, $x, y \in G$. Platí:

(a) $(x^{-1})^{-1} = x$

(b) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$

(Použili jsme multiplikativní symboliku.)

Důkaz:

(a) SAMI

(b) Je třeba ukázat, že platí dvě rovnosti: $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = 1$, $(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = 1$. Počítejme:

$$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = x \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = x \cdot 1 \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1,$$

$$(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = y^{-1} \cdot (x \cdot x^{-1}) \cdot y = y^{-1} \cdot 1 \cdot y = y^{-1} \cdot y = 1.$$

1.2.6 DEFINICE

Okruh je množina spolu se dvěma binárními operacemi, většinou zvanými sčítání a násobení,

přičemž vzhledem ke sčítání se jedná o komutativní grupu a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. Okruh se nazývá asociativní (komutativní, s jednotkovým prvkem), pokud operace násobení je asociativní (komutativní, má neutrální prvek).

1.2.7 TVRZENÍ

Nechť R je okruh, $x, y \in R$. Platí:

$$(a) \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

$$(b) \quad x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$$

$$(c) \quad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

$$\text{Důkaz:} \quad x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

$$x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0)$$

$$0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x \cdot 0))$$

$$0 = x \cdot 0 + 0$$

$$0 = x \cdot 0$$

Obdobně se dokáže, že $0 \cdot x = 0$.

$$(b) \quad x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0$$

Vidíme, že $x \cdot (-y)$ je prvek opačný k prvku $x \cdot y$, čili $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Obdobně se dokáže, že $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

$$(c) \quad \text{Využijeme již dokázanou část (b): } (-x) \cdot (-y) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y.$$

1.2.8 DEFINICE

Obor integrity je asociativní a komutativní okruh, v němž pro každé dva prvky x, y platí: Jestliže $x \cdot y = 0$, pak $x = 0$ nebo $y = 0$.

1.2.9 DEFINICE

Těleso je aspoň dvouprvkový asociativní okruh s jednotkovým prvkem (označme jej 1), v němž pro každý nenulový prvek x existuje prvek y takový, že $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

Prvek y se značí x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$. Značení je možno zavést, neboť prvek y je určen

jednoznačně (necht' $x \cdot z = z \cdot x = 1$; pak $y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z = 1 \cdot z = z$).

Je-li v tělese násobení komutativní, pak hovoříme o komutativním tělese. Protože v tomto textu budeme pracovat výhradně s komutativními tělesy, budeme pro stručnost místo názvu komutativní těleso používat pouze slovo těleso.

1.2.10 TVRZENÍ

(a) Každé těleso je obor integrity

(b) Každý aspoň dvouprvkový konečný obor integrity s jednotkovým prvkem je těleso.

Důkaz:

(a) Necht' x, y jsou takové prvky tělesa, že $x \cdot y = 0$. Chceme: $x = 0$ nebo $y = 0$.

Rozlišíme dva případy:

$$(I) \quad x = 0$$

$$(II) \quad x \neq 0$$

ad (I): Jsme hotovi.

ad (II): $x \cdot y = 0$

$$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$$

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0$$

$$1 \cdot y = 0$$

$$y = 0$$

(b) Necht' obor integrity má n prvků $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vezměme libovolný prvek $x, x \neq 0$.

Hledáme y tak, aby $x \cdot y = 1$ (vztah $y \cdot x = 1$ ihned vyplyne z komutativity násobení).

Ukážeme, že prvky $x \cdot x_1, x \cdot x_2, \dots, x \cdot x_n$ jsou navzájem různé. Pro důkaz sporem

předpokládejme, že $x \cdot x_i = x \cdot x_j$ pro nějaká $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $i \neq j$. Pak

$$x \cdot x_i + (-(x \cdot x_j)) = x \cdot x_j + (-(x \cdot x_j))$$

$$x \cdot x_i + x \cdot (-x_j) = 0$$

$$x \cdot (x_i + (-x_j)) = 0$$

Protože počítáme v oboru integrity a $x \neq 0$, nutně $x_i + (-x_j) = 0$, takže $x_i = x_j$, spor. Víme tedy, že prvky $x \cdot x_1, x \cdot x_2, \dots, x \cdot x_n$ jsou navzájem různé. Protože je jich n , jedná se o všechny prvky oboru integrity a tedy $1 = x \cdot x_k$ pro nějaké $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Stačí položit $y = x_k$.

Základními příklady těles jsou tělesa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Všechna jsou nekonečná. Později uvedeme nekonečně mnoho příkladů konečných těles.

1.2.11 DEFINICE

Nechť R je relace na množině A . Relace R se nazývá

reflexivní, pokud pro všechna $x \in A$ platí xRx

tranzitivní, pokud pro všechna $x, y, z \in A$ platí: jestliže xRy a yRz , pak xRz .

symetrická, pokud pro všechna $x, y \in A$ platí: jestliže xRy , pak yRx .

antisymetrická, pokud pro všechna $x, y \in A$ platí: jestliže xRy a yRx , pak $x = y$.

1.2.12 DEFINICE

Ekvivalence je relace (na nějaké množině), která je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní.

1.2.13 DEFINICE

Nechť A je neprázdná množina. Rozklad množiny A je systém množin S splňující:

(a) Jestliže $B \in S$, pak $B \neq \emptyset$.

(b) Jestliže $B, C \in S$, $B \neq C$, pak $B \cap C = \emptyset$.

(c) $\bigcup_{B \in S} B = A$

Všimněme si, že z podmínky (c) v definici 1.2.13. ihned plyne: jestliže $B \in S$, pak $B \subseteq A$.

1.2.14 TVRZENÍ

Nechť $\sim$ je ekvivalence na neprázdné množině A . Položme pro libovolné $a \in A$,

$$\bar{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}.$$

Nechť $S = \{\bar{a} \mid a \in A\}$. Pak S je rozklad množiny A .

Důkaz

(a) Relace $\sim$ je reflexivní. Tudíž $a \sim a$, $a \in \bar{a}$, $\bar{a} \neq \emptyset$.

(b) Nechť $a, b \in A$, $\bar{a} \neq \bar{b}$. Chceme: $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

Předpokládejme opak, tj. $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Bud' $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Pak $x \sim a$, $x \sim b$. Ukážeme, že $\bar{a} \subseteq \bar{b}$.

Bud' $y \in \bar{a}$. Je $y \sim a$. Z $x \sim a$ plyne $a \sim x$, protože relace $\sim$ symetrická. Z $y \sim a$, $a \sim x$ plyne $y \sim x$ ($\sim$ je tranzitivní relace). Z $y \sim x$, $x \sim b$ dostáváme $y \sim b$. Tudíž $y \in \bar{b}$.

Obdobně lze ukázat, že $\bar{b} \subseteq \bar{a}$. Takže celkem $\bar{a} = \bar{b}$, to je však spor. Nutně tedy $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

(c) $\bigcup_{a \in A} \bar{a} \subseteq A$: To je jasné, protože $\bar{a} \subseteq A$. $A \subseteq \bigcup_{a \in A} \bar{a}$: Stačí uvědomit, že pro každé $a \in A$ je $a \in \bar{a}$.

Rozklad S , sestrojený ve tvrzení 1.2.14., se značí $A/\sim$ a nazývá se faktorová množina množiny A podle ekvivalence $\sim$.

1.2.15 TVRZENÍ

Nechť $\sim$ je ekvivalence na neprázdné množině A . Pro libovolné prvky $a, b \in A$ platí:

$\bar{a} = \bar{b}$ právě tehdy, když $a \sim b$.

Důkaz:

(I) Nechť $\bar{a} = \bar{b}$. Jelikož $a \in \bar{a}$, máme $a \in \bar{b}$ a tedy $a \sim b$.

(II) Necht' $a \sim b$.

$\bar{a} \subseteq \bar{b}$: Bud' $x \in \bar{a}$. Je $x \sim a$. Protože $\sim$ je tranzitivní, dostáváme $x \sim b$, $x \in \bar{b}$.

$\bar{b} \subseteq \bar{a}$: Obdobně.

Celkem jsme dostali fakt $\bar{a} = \bar{b}$.

1.2.16 DEFINICE

Necht' a, b, m jsou celá čísla, $m > 0$. Říkáme, že a je kongruentní s b modulo m , pokud m dělí $b - a$. Tento vztah zapisujeme $a \equiv b(m)$. Bude-li z kontextu jasné, o jaké m se jedná, můžeme psát pouze $a \equiv b$.

1.2.17 TVRZENÍ

$\equiv$ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z}$.

Důkaz:

(a) $\equiv$ je reflexivní: $m | 0 = a - a$, takže $a \equiv a$.

(b) $\equiv$ je symetrická: Necht' $a \equiv b$. Chceme: $b \equiv a$. Víme, že $m | b - a$. Existuje tedy $c \in \mathbb{Z}$, $b - a = c \cdot m$. Pak $a - b = (-c) \cdot m$, $m | a - b$, $b \equiv a$.

(c) $\equiv$ je tranzitivní: Necht' $a \equiv b$, $b \equiv c$. Chceme: $a \equiv c$. Víme, že $m | b - a$, $m | c - b$.

Existuje tedy $d, e \in \mathbb{Z}$, $b - a = d \cdot m$, $c - b = e \cdot m$. Pak

$c - a = (c - b) + (b - a) = e \cdot m + d \cdot m = (e + d) \cdot m$, $m | c - a$, $a \equiv c$.

Faktorovou množinu $\mathbb{Z}/\equiv$ budeme značit $\mathbb{Z}_m$.

1.2.18 TVRZENÍ

Množina $\mathbb{Z}_m$ má přesně m prvků, totiž $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$.

Důkaz: Je třeba dokázat dvě záležitosti:

(I) $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\} = \mathbb{Z}_m$

(II) $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$ jsou navzájem různé.

ad (I): $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\} \subseteq \mathbb{Z}_m$: To je zřejmé.

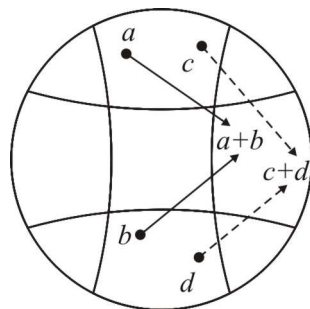
$\mathbb{Z}_m \subseteq \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$: Necht' $a \in \mathbb{Z}$. Chceme: $a \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$. Vydělme číslo a se zbytkem číslem m : $a = q \cdot m + r$ pro jistá $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < m$. Pak ovšem $a - r = q \cdot m$, $m | a - r$, $r \equiv a$, $\bar{r} = \bar{a}$, $\bar{a} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$

ad (II): Necht' $a, b \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < b \leq m-1$. Chceme: $\bar{a} \neq \bar{b}$. Pro důkaz sporem předpokládejme, že $\bar{a} = \bar{b}$. Pak $a \equiv b$, $m | b - a$, $b - a = c \cdot m$ pro jisté $c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$ (uvědomme si, že $b - a > 0$, $m > 0$). Ovšem $b - a \leq (m-1) - 0 = m-1$ takže $m \leq c \cdot m = b - a \leq m-1$, spor.

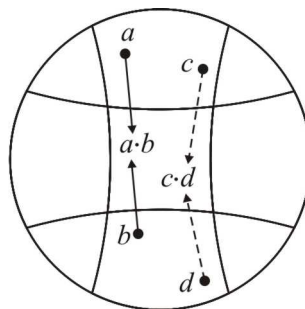
Na množině $\mathbb{Z}_m$ přirozeným způsobem zavedeme operace sčítání a násobení. Necht' $a, b \in \mathbb{Z}$. Klademe $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$

Necht' $c, d \in \mathbb{Z}$, $\bar{c} = \bar{a}$, $\bar{d} = \bar{b}$. Aby výše zavedené operace sčítání a násobení v $\mathbb{Z}_m$ byly definovány korektně, musí platit $\overline{a+b} = \overline{c+d}$, $\overline{a \cdot b} = \overline{c \cdot d}$.

$\mathbb{Z}/\equiv$



$\mathbb{Z}/\equiv$



1.2.19 TVRZENÍ

Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Jestliže $a \equiv c$, $b \equiv d$, pak $a+b \equiv c+d$, $a \cdot b \equiv c \cdot d$.

Důkaz: Nechť $a \equiv c$, $b \equiv d$. Existuje tedy $p, q \in \mathbb{Z}$, $c-a=p \cdot m$, $d-b=q \cdot m$.

$$c-a=p \cdot m$$

$$d-b=q \cdot m$$

$$(c+d)-(a+b)=(p+q) \cdot m$$

Vidíme, že $m \mid (c+d)-(a+b)$, tedy $a+b \equiv c+d$. Dále,

$$c \cdot d - a \cdot b = c \cdot d - c \cdot b + c \cdot b - a \cdot b = c \cdot (d-b) + (c-a) \cdot b = c \cdot q \cdot m + p \cdot m \cdot b = (c \cdot q + p \cdot b) \cdot m. \text{ Čili } m \mid c \cdot d - a \cdot b, a \cdot b \equiv c \cdot d.$$

1.2.20 TVRZENÍ

Nechť na $\mathbb{Z}_m$ definujeme sčítání a násobení takto: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Pak $\mathbb{Z}_m$ je komutativní asociativní okruh s jednotkovým prvkem $\bar{1}$.

Důkaz: (I) $\mathbb{Z}_m$ s operací $+$ je komutativní grupa s nulovým prvkem $\bar{0}$:

Operace $+$ je asociativní:

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a + (b+c)}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a+b+c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)}$$

Operace $+$ je komutativní:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \bar{b} + \bar{a}.$$

$\bar{0}$ je nulový prvek:

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a}$$

Existence opačných prvků:

$$\bar{a} + \overline{(-a)} = \overline{a+(-a)} = \bar{0}$$

(všimněme si, že $-\bar{a} = \overline{-a}$)

(II) Operace $\cdot$ komutativní, asociativní, $\bar{1}$ je jednotkový prvek: Postupuje se obdobně jako v části (I).

(III) Operace $\cdot$ je distributivní vzhledem k operaci $+$:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a \cdot (b+c)} = \overline{a \cdot b + a \cdot c} = \overline{a \cdot b} + \overline{a \cdot c} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = \overline{a \cdot b + a \cdot c}.$$

1.2.21 TVRZENÍ

Nechť m je celé číslo, $m > 1$. Platí: $\mathbb{Z}_m$ je těleso právě tehdy, když m je prvočíslo.

Důkaz:

$\Rightarrow$: Nechť d je celé číslo, $d > 0$, $d \mid m$. Chceme: $d=1$ nebo $d=m$.

$m = d \cdot e$ pro nějaké $e \in \mathbb{Z}$, $e > 0$.

Zřejmě $0 \equiv m(m)$. Takže $\bar{0} = \bar{m} = \overline{d \cdot e} = \bar{d} \cdot \bar{e}$. Protože $\mathbb{Z}_m$ je těleso, je $\mathbb{Z}_m$ obor integrity (viz 1.2.10.) a $\bar{d} = \bar{0}$ nebo $\bar{e} = \bar{0}$.

Nechť $\bar{d} = \bar{0}$. Pak $d \equiv 0(m)$, $m \mid d$. Protože $d \mid m$, je $d=m$.

Nechť $\bar{e} = \bar{0}$. Pak $e=m$, $d=1$.

$\Leftarrow$: $\mathbb{Z}_m$ je komutativní asociativní okruh s jednotkovým prvkem (1.2.20). Jelikož $\mathbb{Z}_m$ má m prvků (1.2.18.), je okruh $\mathbb{Z}_m$ aspoň dvouprvkový. S ohledem na 1.2.10. zbývá dokázat: Jestliže $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$, pak $\bar{a} = \bar{0}$ nebo $\bar{b} = \bar{0}$. Počítejme: $\bar{0} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$, $0 \equiv a \cdot b(m)$, $m \mid a \cdot b$. Jelikož m je prvočíslo, $m \mid a$ nebo $m \mid b$. V případě $m \mid a$ máme $a \equiv 0(m)$, $\bar{a} = \bar{0}$. V případě $m \mid b$ máme $\bar{b} = \bar{0}$.

Pro ilustraci uvedeme tabulky operací sčítání a násobení v okruzích $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_6$.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	.	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\mathbb{Z}_5$ je těleso (viz 1.2.21.); $\mathbb{Z}_6$ je komutativní asociativní okruh s jednotkovým prvkem $\bar{1}$ (1.2.20.), avšak není to obor integrity, neboť například $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$.

1.3. Uspořádání

1.3.1 DEFINICE

Uspořádání je relace (na nějaké množině), která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Množina, na níž je definováno uspořádání se nazývá uspořádaná. Uspořádání budeme většinou označovat symbolem $\leq$. Je-li $a \leq b$, budeme říkat, že a je menší nebo rovno b . Je-li $a \leq b$ a $a \neq b$, píšeme $a < b$ a říkáme, že a je menší než b . Relace inverzní k $\leq$ a $<$ budeme označovat symboly $\geq$ a $>$. Je-li $a \leq b$ nebo $b \leq a$, pak prvky a, b jsou porovnatelné. Pokud neplatí ani $a \leq b$, ani $b \leq a$, prvky a, b jsou neporovnatelné.

1.3.2 DEFINICE

Nechť A je uspořádaná množina, $x \in A$. Prvek x se nazývá minimální prvek množiny A , pokud neexistuje žádné $y \in A$ splňující podmínku $y < x$. Jinými slovy, pokud pro všechna $y \in A$ platí: jestliže $y \leq x$, pak $y = x$. Obdobně se zavádí pojem maximální prvek množiny A .

1.3.3 DEFINICE

Nechť A je uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $x \in A$. Prvek x se nazývá horní hranice (horní odhad, horní mez) podmnožiny B v množině A , pokud pro každé $y \in B$ je $y \leq x$. Podmnožina B se nazývá shora omezená, existuje-li v množině A aspoň jedna horní hranice množiny B . Obdobně se zavádějí pojmy dolní hranice podmnožiny a podmnožina zdola omezená. Je-li podmnožina zdola omezená a současně shora omezená, pak se nazývá omezená.

1.3.4 DEFINICE

Nechť A je uspořádaná množina, $B \subseteq A$. Podmnožina B se nazývá řetězec, pokud pro každá $x, y \in B$ je $x \leq y$ nebo $y \leq x$ (každé dva prvky z B jsou porovnatelné). Řetězec B se nazývá maximální, jestliže neexistuje žádný řetězec $C \subseteq A$ splňující $B \subset C$ (tj. $B \subseteq C$, $B \neq C$).

1.3.5 DEFINICE

Uspořádaná množina, v níž každá neprázdná podmnožina má nejmenší prvek se nazývá dobře uspořádaná množina.

Připomeňme že množina $\mathcal{P}(A)$, která sestává ze všech podmnožin množiny A , tedy $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$, se nazývá potence množiny A .

1.3.6 DEFINICE

Funkce φ , definovaná na množině $\mathcal{P}(A)$, pro kterou platí $(X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \neq \emptyset) \Rightarrow \varphi(X) \in X$, se nazývá selektor na množině $\mathcal{P}(A)$.

Je-li množina A konečná, pak lze (aspoň teoreticky) sestavit selektor na množině $\mathcal{P}(A)$. Nechť například $A = \{a, b, c\}$. Pak $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

X	$\varphi(X)$
$\emptyset$	Na této hodnotě nezáleží
$\{a\}$	1 možnost: a
$\{b\}$	1 možnost: b
$\{c\}$	1 možnost: c
$\{a, b\}$	2 možnosti: a, b
$\{a, c\}$	2 možnosti: a, c
$\{b, c\}$	2 možnosti: b, c
$\{a, b, c\}$	3 možnosti: a, b, c

Pokud odhlédneme od hodnoty $\varphi(\emptyset)$, existuje celkem $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ selektorů na množině $\mathcal{P}(A)$.

Problém je s existencí selektorů na $\mathcal{P}(A)$, je-li množina A nekonečná. Tento problém obejdeme přijetím následujícího axiomu.

1.3.7 AXIOM VÝBĚRU

Na každé potenční množině existuje selektor.

1.3.8 ZERMELOVA VĚTA

Každou množinu lze dobře uspořádat.

1.3.9 HAUSDORFFOVA VĚTA

Každý řetězec uspořádané množiny je obsažen v některém maximálním řetězci.

1.3.10 VĚTA KURATOWSKÉHO – ZORNOVA

Je-li každý řetězec uspořádané množiny shora omezený, je každý prvek menší nebo roven některému maximálnímu prvku.

1.3.11 TVRZENÍ

Zermelova věta, Hausdorffova věta, a věta Kuratowského - Zornova jsou ekvivalentní s axiomem výběru.

Důkaz:

(I) Z axiomu výběru plyne Zermelova věta.

Viz A. G. KUROŠ, Kapitoly z obecné algebry, Academia, Praha, 1977, strany 23-24.

(II) Z Zermelovy věty plyne Hausdorffova věta.

Viz A. G. KUROŠ, Kapitoly z obecné algebry, Academia, Praha, 1977, strany 24-25.

(III) Z Hausdorffovy věty plyne věta Kuratowského – Zornova.

Nechť M je uspořádaná množina, $a \in M$. Hledáme prvek $b \in M$ splňující dvě podmínky: $(\alpha) a \leq b$, $(\beta) b$ je maximální

Uvažme řetězec $A = \{a\}$. Dle Hausdorffovy věty existuje maximální řetězec C takový, že $A \subseteq C$.

Každý řetězec uspořádané množiny M je shora omezený. Existuje tedy prvek $b \in M$, jenž je horní hranicí řetězce C . Ukážeme, že b splňuje podmínky (α) a (β)

ad (α) : Jelikož b je horní hranicí množiny C , je $x \leq b$ pro každé $x \in C$. Ovšem $a \in A \subseteq C$, takže $a \in C$, $a \leq b$

ad (β) : Předpokládejme, že prvek b maximální není. Existuje tedy $d \in M$, $b < d$. Uvažme množinu $D = C \cup \{d\}$. Množina D je řetězec: Zvolme libovolně $x, y \in D$. Chceme: $x \leq y$ nebo $y \leq x$.

Rozlišme 4 případy:

(1) $x, y \in C$

(2) $x \in C, y = d$

(3) $y \in C$, $x = d$

(4) $x = y = d$.

ad (1): Jelikož C je řetězec, máme $x \leq y$ nebo $y \leq x$.

ad (2): b je horní hranicí množiny C , takže $x \leq b$. Také $b < d = y$, takže $x \leq y$.

ad (3): Obdobně jak v případě (2) se dokáže, že $y \leq x$.

ad (4): Protože $x = y$, nutně $x \leq y$.

Dále vidíme, že $d \notin C$. Kdyby totiž platilo $d \in C$, bylo by $d \leq b$ (b je horní hranicí množiny C) a tedy $b = d$ (víme totiž, že $b \leq d$). To by však byl spor s faktem $b < d$.

Protože $d \notin C$, je $C \subset D$. Avšak D je řetězec, spor (předpokládali jsme, že C je maximální řetězec). Nutně tudíž prvek b je maximální.

(IV) Z věty Kuratowského – Zornovy plyne axiom výběru:

Viz A. G. KUROŠ, Kapitoly z obecné algebry, Academia, Praha, 1977, strana 25.

1.3.12 POZNÁMKA

Je snadné dokázat, že z Zermelovy věty plyne axiom výběru. Předpokládejme platnost Zermelovy věty. Ukážeme, že platí axiom výběru. Necht' A je libovolná množina. Je třeba sestavit selektor φ na množině $\mathcal{P}(A)$. Definujeme funkci φ takto: Necht' $B \in \mathcal{P}(A)$. Pak

$\varphi(B) =$

(I) COKOLI pokud $B = \emptyset$

(II) nejmenší prvek množiny B pokud $B \neq \emptyset$

Kapitola 2 - Obecná teorie vektorových prostorů

2.1. Definice vektorového prostoru

2.1.1. DEFINICE

Nechť V s operací $+$ je komutativní grupa, nechť T s operacemi $+$ a $\cdot$ je těleso. Nechť pro každý prvek $a \in T$ a každý prvek $\vec{v} \in V$ je jednoznačně určen prvek $a \cdot \vec{v} \in V$. Pak V se nazývá vektorový prostor nad tělesem T , jestliže:

(1) pro všechna $a, b \in T$, pro všechna $\vec{u} \in V$

$$(a \cdot b) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})$$

(2) pro všechna $a, b \in T$, pro všechna $\vec{u} \in V$

$$(a + b) \cdot \vec{u} = (a \cdot \vec{u}) + (b \cdot \vec{u})$$

(3) pro všechna $a \in T$, pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) + (a \cdot \vec{v})$$

(4) pro všechna $\vec{u} \in V$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

(1 je neutrální prvek operace $\cdot$ v T).

Prvky množiny V nazýváme vektory, prvky množiny T skaláry.

2.1.2. TVRZENÍ

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $\vec{v} \in V$, $c \in T$.

Platí:

(1) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (0 je neutrální prvek operace $+$ v tělese T , $\vec{0}$ je neutrální prvek grupy V ; $\vec{0}$ se nazývá nulový vektor)

(2) $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$

(3) $-(c \cdot \vec{v}) = (-c) \cdot \vec{v} = c \cdot (-\vec{v})$

(4) Jestliže $c \cdot \vec{v} = \vec{0}$, pak $c = 0$ nebo $\vec{v} = \vec{0}$.

Důkaz:

(1) $0 \cdot \vec{v} = (0 + 0) \cdot \vec{v} = (0 \cdot \vec{v}) + (0 \cdot \vec{v}) \quad | + (- (0 \cdot \vec{v}))$

$$0 \cdot \vec{v} + (- (0 \cdot \vec{v})) = [(0 \cdot \vec{v}) + (0 \cdot \vec{v})] + (- (0 \cdot \vec{v}))$$

$$\vec{0} = (0 \cdot \vec{v}) + [(0 \cdot \vec{v}) + (- (0 \cdot \vec{v}))]$$

$$\vec{0} = (0 \cdot \vec{v}) + \vec{0}$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$$

(2) $c \cdot \vec{0} = c \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = (c \cdot \vec{0}) + (c \cdot \vec{0}) \quad | + (- (c \cdot \vec{0}))$

$$\vec{0} = c \cdot \vec{0}$$

(3) $(-c) \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{v} = ((-c) + c) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$, takže $-(c \cdot \vec{v}) = (-c) \cdot \vec{v}$

$$c \cdot (-\vec{v}) + c \cdot \vec{v} = c \cdot (-\vec{v} + \vec{v}) = c \cdot \vec{0} = \vec{0}, \text{ takže } -(c \cdot \vec{v}) = c \cdot (-\vec{v})$$

(4) Nechť $c \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Rozlišme 2 případy:

(α) $c = 0$

(β) $c \neq 0$

ad (α): Jsme hotovi.

ad (β): $c \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad | \cdot \frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c} \cdot (c \cdot \vec{v}) = \frac{1}{c} \cdot \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{c} \cdot c\right) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

2.1.3. Příklad

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$. Definujeme $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
 $c \cdot (a_1, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_n)$ pro libovolná $c \in T$, $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in T^n$.
Pak T^n je vektorový prostor nad T . Zdůvodnění přenecháváme čtenáři.

2.2. Podprostory vektorového prostoru

2.2.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $W \subseteq V$. W se nazývá podprostor vektorového prostoru V , platí-li:

- (1) $\vec{0} \in W$
- (2) Jestliže $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak $\vec{x} + \vec{y} \in W$.
- (3) Jestliže $c \in T$ a $\vec{x} \in W$, pak $c \cdot \vec{x} \in W$.

2.2.2. VĚTA (o průniku podprostorů)

Nechť I je indexová množina, $I \neq \emptyset$, W_i pro $i \in I$ jsou podprostory vektorového prostoru V nad tělesem T . Pak $\bigcap_{i \in I} W_i$ je podprostor vektorového prostoru V .

Důkaz přenecháváme čtenáři.

2.2.3. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $M \subseteq V$. $U \subseteq V$ se nazývá podprostor generovaný množinou vektorů M , jestliže

- (1) U je podprostor vektorového prostoru V
- (2) $M \subseteq U$
- (3) Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$, pak $U \subseteq W$.

Tedy: Podprostor generovaný množinou vektorů je nejmenší podprostor (vzhledem k inkluzi), který danou množinu vektorů obsahuje.

2.2.4. TVRZENÍ

Podprostor generovaný množinou vektorů vždy existuje a je určen jednoznačně

Důkaz: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $M \subseteq V$.

(I) Existence:

Bud' W_i pro $i \in I$ systém všech podprostorů vektorového prostoru V , které obsahují M . Je $I \neq \emptyset$, neboť $M \subseteq V$ a V je podprostor ve V . Položme $U = \bigcap_{i \in I} W_i$. Pak

- (1) U je podprostor vektorového prostoru V – viz 2.2.2.
- (2) $M \subseteq U$ – to je zřejmé
- (3) Nechť W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$. Pak existuje $i_0 \in I$ tak, že $W = W_{i_0}$. Takže $U = \bigcap_{i \in I} W_i \subseteq W_{i_0} = W$.

(II) Jednoznačnost:

Nechť U a U' jsou podprostory generované množinou M . Platí tedy:

- (1) U je podprostor vektorového prostoru V
- (2) $M \subseteq U$
- (3) Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$, pak $U \subseteq W$.
- (1') U' je podprostor vektorového prostoru V
- (2') $M \subseteq U'$
- (3') Jestliže W je podprostor vektorového prostoru V a $M \subseteq W$ pak $U' \subseteq W$.

Z (1), (2) a (3') plyne $U' \subseteq U$. Z (1'), (2') a (3) plyne $U \subseteq U'$. Celkem: $U = U'$

2.2.5. OZNAČENÍ

Podprostor generovaný množinou vektorů M budeme značit $\langle M \rangle$. Prvky množiny M se

nazývají generátory podprostoru $\langle M \rangle$. Smysluplnost zavedeného označení je založena na 2.2.4.

2.2.6. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $k \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V$. Lineární kombinací vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ rozumíme každý vektor $c_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{x}_k$, kde $c_1, \dots, c_k \in T$.

2.2.7. VĚTA

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$.

Platí:

$$\langle M \rangle = \{c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n \mid n \in \mathbb{N}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in M, c_1, \dots, c_n \in T\}$$

Speciálně:

$$\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \rangle = \{c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n \mid c_1, \dots, c_n \in T\}.$$

Důkaz: Nechť $U = \{c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n \mid n \in \mathbb{N}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in M, c_1, \dots, c_n \in T\}$.

(1) U je podprostor vektorového prostoru V :

(a) Zvolme $\vec{x} \in M$. Pak $0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \in U$.

(b) Nechť $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n$, $\vec{y} = d_1 \cdot \vec{w}_1 + \dots + d_m \cdot \vec{w}_m \in U$.

Chceme: $\vec{x} + \vec{y} \in U$. To je však zřejmé.

(c) Nechť $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n \in U$, $c \in T$. Chceme: $c \cdot \vec{x} \in U$.

$$c \cdot \vec{x} = c \cdot (c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n) = (c \cdot c_1) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (c \cdot c_n) \cdot \vec{v}_n \in U.$$

(2) $M \subseteq U$:

Nechť $\vec{x} \in M$. Pak $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} \in U$.

(3) Nechť W je podprostor vektorového prostoru, $M \subseteq W$.

Chceme: $U \subseteq W$. Zvolme libovolně $\vec{x} \in U$. Pak

$$\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in M, c_1, \dots, c_n \in T. \text{ Jelikož } M \subseteq W, \text{ máme } \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in W.$$

Protože W je podprostor, $c_1 \cdot \vec{v}_1, \dots, c_n \cdot \vec{v}_n \in W$ a také $c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n = \vec{x} \in W$.

2.2.8. DEFINICE

Zavedeme pojem součet podmnožin vektorového prostoru. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $M_1, M_2 \subseteq V$. Klademe $M_1 + M_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \mid \vec{x}_1 \in M_1, \vec{x}_2 \in M_2\}$

2.2.9. VĚTA

Jsou-li W_1, W_2 podprostory, je $W_1 + W_2$ také podprostor a $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

Důkaz: přenecháváme čtenáři.

2.3. Lineární závislost a nezávislost

2.3.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $k \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$. Vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ se nazývají lineárně nezávislé, platí-li: Jestliže $c_1, \dots, c_k \in T$ a $c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$, pak $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

2.3.2. POZNÁMKA

Vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ jsou lineárně závislé znamená: Existují $c_1, \dots, c_k \in T$,

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}, c_i \neq 0 \text{ pro nějaké } i \in \{1, \dots, k\}. \text{ Takže}$$

$$c_i \cdot \vec{v}_i = (-c_1) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (-c_{i-1}) \cdot \vec{v}_{i-1} + (-c_{i+1}) \cdot \vec{v}_{i+1} + \dots + (-c_k) \cdot \vec{v}_k,$$

$$\vec{v}_i = \frac{-c_1}{c_i} \cdot \vec{v}_1 + \dots + \frac{-c_{i-1}}{c_i} \cdot \vec{v}_{i-1} + \frac{-c_{i+1}}{c_i} \cdot \vec{v}_{i+1} + \dots + \frac{-c_k}{c_i} \cdot \vec{v}_k, \text{ vektor } \vec{v}_i \text{ je lineární kombinací}$$

vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k$

2.3.3. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $M \subseteq V$, M je konečná. Necht' $M \neq \emptyset$, M má k prvků, $M = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$. Množina M se nazývá lineárně nezávislá právě tehdy, když vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ jsou lineárně nezávislé. Je-li $M = \emptyset$, pak M považujeme za lineárně nezávislou množinu.

2.3.4. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $M \subseteq V$. Množina M se nazývá lineárně nezávislá právě tehdy, když každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá (ve smyslu definice 2.3.3.).

2.3.5. POZNÁMKA

Všimněte si, že pro konečné množiny vektorů máme dvě definice lineární nezávislosti, totiž 2.3.3. a 2.3.4. Musíme samozřejmě ukázat, že jsou ekvivalentní. Necht' M je konečná množina vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T . Je-li M nezávislá dle 2.3.4., je každá konečná podmnožina množiny M lineárně nezávislá dle 2.3.3. Avšak M je konečná podmnožina množiny M , takže M je lineárně nezávislá dle 2.3.3. Nyní naopak. Necht' M je nezávislá dle 2.3.3. Buď N konečná podmnožina množiny M . Je třeba ukázat, že N je lineárně nezávislá dle 2.3.3. Případy $N = \emptyset$ a $N = M$ jsou jasné. Necht' tedy $\emptyset \subset N \subset M$. Necht' N má k prvků, M má $k+l$ prvků ($k, l \in \mathbb{N}$), $N = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$, $M = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l\}$. Zbývá zdůvodnit, že vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou lineárně nezávislé. Necht' $c_1, \dots, c_k \in T$, $c_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{x}_k = \vec{0}$. Chceme: $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Uvědomme si, že $c_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{x}_k + 0 \cdot \vec{y}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{y}_l = \vec{0}$. Protože vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l$ jsou lineárně nezávislé, dostáváme $c_1 = \dots = c_k = 0$.

2.4. Báze

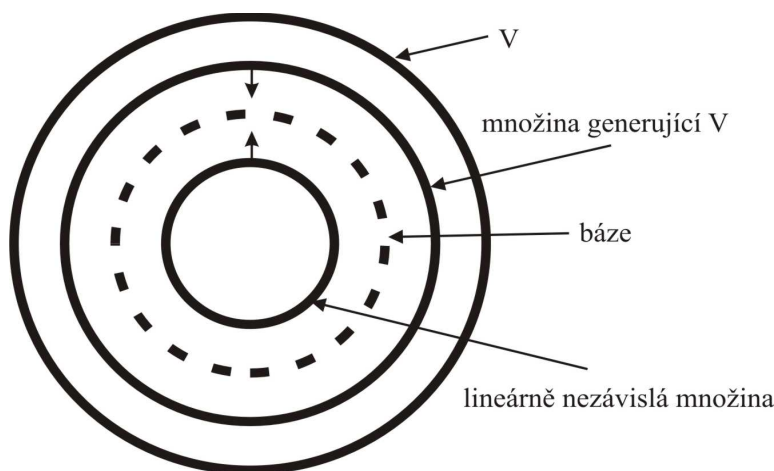
2.4.1. TVRZENÍ

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T .

(a) Jestliže $M \subseteq V$, M je lineárně nezávislá, $N \subseteq M$, pak N je lineárně nezávislá.

(b) Jestliže $M \subseteq V$, $\langle M \rangle = V$, $M \subseteq N \subseteq V$, pak $\langle N \rangle = V$.

Důkaz přenecháváme čtenáři.



2.4.2. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $B \subseteq V$. Množina B se nazývá báze vektorového prostoru V , platí-li:

- (1) B je lineárně nezávislá
- (2) $\langle B \rangle = V$.

2.4.3. TVRZENÍ

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $B \subseteq V$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) B je báze
- (2) B je maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislá podmnožina ve V
- (3) B je minimální (vzhledem k inkluzi) podmnožina ve V splňující $\langle B \rangle = V$.

Důkaz:

(1) $\Rightarrow$ (2): Jistě B je lineárně nezávislá množina. Zbývá ukázat její maximalitu. Nechť $M \subseteq V$ je lineárně nezávislá množina, $B \subseteq M$. Chceme: $B = M$. Uvažme 2 případy:

(I) $B = \emptyset$

(II) $B \neq \emptyset$

ad (I): $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$, takže $V = \{\vec{0}\}$. Máme 2 možnosti pro M : $M = \emptyset$ a $M = \{\vec{0}\}$. Druhý případ odpadá, neboť vektor $\vec{0}$ je lineárně závislý. Tudíž $M = \emptyset = B$.

ad (II): Zvolme libovolně $\vec{x} \in M$. Chceme: $\vec{x} \in B$. Víme, že $\langle B \rangle = V$. Dle 2.2.7. existuje $n \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in B$, $c_1, \dots, c_n \in T$, $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n$. Lze předpokládat, že vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jsou navzájem různé. Předpokládejme dále, že $\vec{x} \notin \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Množina $\{\vec{x}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ je lineárně závislá, jak vidíme ze vztahu $1 \cdot \vec{x} + (-c_1) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (-c_n) \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$. Ovšem $\{\vec{x}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq M$, což je spor s lineární nezávislostí M . Do sporu nás zavedl předpoklad $\vec{x} \notin \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Tudíž $\vec{x} \in \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq B$, $\vec{x} \in B$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Nejdříve ukážeme, že $\langle B \rangle = V$.

$\langle B \rangle \subseteq V$: To je jasné.

$V \subseteq \langle B \rangle$: Nechť $\vec{x} \in V$. Chceme: $\vec{x} \in \langle B \rangle$. Je-li $\vec{x} \in B$, jsme hotovi, poněvadž $B \subseteq \langle B \rangle$.

Nechť tedy $\vec{x} \notin B$. Položme $M = B \cup \{\vec{x}\}$. Je $B \subset M$. Protože B je maximální lineárně nezávislá množina, je množina M lineárně závislá. Existuje tedy její konečná podmnožina N , jež je lineárně závislá. Kdyby $\vec{x} \notin N$, bylo by $N \subseteq B$, což by byl spor s lineární nezávislostí množiny B . Tudíž $\vec{x} \in N$. Pokud $N = \{\vec{x}\}$, je $\vec{x} = \vec{0}$ (uvědomme si, že množina N je lineárně závislá) a zřejmě $\vec{x} \in \langle B \rangle$. Nechť tedy N má $k+1$ prvků, $k \in \mathbb{N}$, $N = \{\vec{x}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k\}$. Zřejmě $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k \in B$. Množina N je lineárně závislá. Existují tedy $d_0, d_1, \dots, d_k \in T$, $d_0 \cdot \vec{x} + d_1 \cdot \vec{y}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{y}_k = \vec{0}$ a přitom $d_i \neq 0$ pro nějaké $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Kdyby $d_0 = 0$, tak by platilo: $d_1 \cdot \vec{y}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{y}_k = \vec{0}$, $d_i \neq 0$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, k\}$.

Množina $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k\}$ by byla lineárně závislá, což by byl spor s lineární nezávislostí množiny B (uvědomme si, že $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k\} \subseteq B$). Nutně tedy $d_0 \neq 0$,

$\vec{x} = (-\frac{d_1}{d_0}) \cdot \vec{y}_1 + \dots + (-\frac{d_k}{d_0}) \cdot \vec{y}_k \in \langle B \rangle$. Nyní ukážeme, že B je minimální (vzhledem k inkluzi)

mezi všemi podmnožinami M ve V splňujícími $\langle M \rangle = V$. Nechť tedy $M \subseteq V$, $\langle M \rangle = V$, $M \subseteq B$. Chceme $M = B$. Rozlišíme 2 případy:

(I) $M = \emptyset$

(II) $M \neq \emptyset$

ad (I): $\langle M \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$, takže $V = \{\vec{0}\}$. Protože $B \subseteq \{\vec{0}\}$ je lineárně nezávislá, je $B = \emptyset$ a rovnost $M = B$ je dokázána.

ad (II): Stačí ukázat, že $B \subseteq M$. Zvolme $\vec{x} \in B$. Chceme: $\vec{x} \in M$. Protože $\langle M \rangle = V$, je $\vec{x} \in \langle M \rangle$. Dle 2.2.7. existují $n \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in M$, $c_1, \dots, c_n \in T$, tak, že

$\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n$. Lze předpokládat, že vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jsou navzájem různé.

Předpokládejme dále, že $\vec{x} \notin \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Ze vztahu $1 \cdot \vec{x} + (-c_1) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (-c_n) \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ plyne, že vektory $\vec{x}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jsou lineárně závislé. Protože $\vec{x}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in B$, dostáváme spor s lineární nezávislostí množiny B . Takže $\vec{x} \in \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq M$, $\vec{x} \in M$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Zbývá ukázat, že množina B je lineárně nezávislá. Předpokládejme opak. Existuje tedy $M \subseteq B$, M konečná, lineárně závislá. Je $M \neq \emptyset$. Nechť $M = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$. Rozlišíme

dva případy: (I) $k=1$ (II) $k>1$

ad (I): Existuje $c_1 \in T$, $c_1 \neq 0$, tak, že $c_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$. Pak ovšem $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $\vec{0} \in B$. Zřejmě $\langle B - \{\vec{0}\} \rangle = \langle B \rangle$. Pak $\langle B - \{\vec{0}\} \rangle = V$. Jelikož $B - \{\vec{0}\} \subset B$, dostali jsme spor s tím, že B je minimální množina vektorů generující V .

ad (II): Existuje $i \in \{1, \dots, k\}$, $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_k \in T$,
 $\vec{v}_i = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_{i-1} \cdot \vec{v}_{i-1} + c_{i+1} \cdot \vec{v}_{i+1} + \dots + c_k \cdot \vec{v}_k \in T$. Zřejmě $\langle B - \{\vec{v}_i\} \rangle = \langle B \rangle$. Pak $\langle B - \{\vec{v}_i\} \rangle = V$. Jelikož $B - \{\vec{v}_i\} \subset B$, dostali jsme spor s tím, že B je minimální množina vektorů generující V .

2.4.4. VĚTA (o existenci báze a o doplnění lineárně nezávislých množin do báze)

(a) Každý vektorový prostor má bázi.

(b) Každá lineárně nezávislá množina je obsažena v nějaké bázi.

Důkaz: Mějme vektorový prostor V nad tělesem T . Budiž S systém všech lineárně nezávislých podmnožin ve V . Je $S \neq \emptyset$, neboť například $\emptyset \in S$. Uvažujme S jako uspořádanou množinu – za relaci uspořádání vezmeme relaci inkluze $\subseteq$. Bud' $R \subseteq S$ řetězec.

Pokud $R = \emptyset$, pak R je shora omezený, například prvkem $\emptyset$. Necht' $R \neq \emptyset$. Označme

$B = \bigcup_{A \in R} A$. Nyní ukážeme, že B je horní hranicí řetězce R . K tomu je třeba ukázat:

(I) $B \in S$

(II) Pro každé $A \in R$ je $A \subseteq B$.

ad (I): Je tedy třeba ukázat, že množina B je lineárně nezávislá. Předpokládejme opak.

Existuje tedy $W \subseteq B$, W je konečná, W je lineárně závislá. Nutně $W \neq \emptyset$. Necht'

$W = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$. Protože W je lineárně závislá, existují $c_1, \dots, c_k \in T$,

$c_1 \cdot \vec{w}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{w}_k = \vec{0}$, $c_i \neq 0$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, k\}$. Vektory $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ patří do

$B = \bigcup_{A \in R} A$. Takže existují $A_1, \dots, A_k \in R$, $\vec{w}_1 \in A_1, \dots, \vec{w}_k \in A_k$. Uvědomme si, že R je

řetězec. Mezi množinami $A_1, \dots, A_k$ tedy existuje největší (vzhledem k inkluzi) – označme ji A_j ($j \in \{1, \dots, k\}$). Platí:

$A_1 \subseteq A_j$, $A_2 \subseteq A_j$, $\dots$, $A_k \subseteq A_j$. Odtud plyne, že $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k \in A_j$. Jelikož $A_j \in R \subseteq S$, je A_j

lineárně nezávislá podmnožina ve V . Avšak $c_1 \cdot \vec{w}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{w}_k = \vec{0}$, $c_i \neq 0$. Dostali jsme spor.

Vidíme, že vskutku množina B je lineárně nezávislá.

ad (II): Stačí si připomenout, že $B = \bigcup_{A \in R} A$.

Právě jsme ukončili důkaz faktu, že každý řetězec uspořádané množiny S je shora omezený.

Věta Kuratowského-Zornova (1.3.10.) nám dává:

Pro každé $A \in S$ existuje $B \in S$ takové, že $A \subseteq B$ a B je maximální (vzhledem k inkluzi).

Tedy:

Pro každou lineárně nezávislou množinu A existuje lineárně nezávislá množina B taková, že $A \subseteq B$ a B je maximální (vzhledem k inkluzi).

Nyní vezmeme ještě v úvahu tvrzení 2.4.3. Pro $B \subseteq V$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(1) B je báze

(2) B je maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislá podmnožina ve V .

Dokázali jsme tedy toto: Pro každou lineárně nezávislou množinu A existuje báze B taková, že $A \subseteq B$.

Důkaz části (b) věty 2.4.4. je hotov. Část (a) pak ihned plyne z (b), uvědomíme-li si, že $\emptyset$ je lineárně nezávislá.

2.4.5. PŘÍKLAD

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$. Množina vektorů

$$\left\{ \begin{aligned} &(1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ &(0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ &(0, 0, 1, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ &(0, 0, 0, \dots, 1, 0), \\ &(0, 0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned} \right\}$$

je báze vektorového prostoru T^n

2.5. Steinitzova věta o výměně

2.5.1. VĚTA (Steinitzova věta o výměně)

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $k, l \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k \in V$, $\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\} \rangle = V$, vektory $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ jsou lineárně nezávislé. Pak platí:

(a) $k \leq l$

(b) Existují $i_1, \dots, i_{l-k} \in \{1, \dots, l\}$ tak, že $\langle \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_{l-k}}\} \rangle = V$.

Důkaz: Budeme postupovat indukcí vzhledem k číslu k .

(I) $k=1$

Zřejmě $1 \leq l$. Existují $c_1, \dots, c_l \in T$, $c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_l \vec{v}_l = \vec{w}_1$. Kdyby $c_1 = \dots = c_l = 0$, bylo by $\vec{w}_1 = \vec{0}$, což by byl spor s lineární nezávislostí vektoru $\vec{w}_1$. Existuje tedy $j \in \{1, \dots, l\}$, $c_j \neq 0$. Položme $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{j-1} = j-1, i_j = j+1, i_{j+1} = j+2, \dots, i_{l-1} = l$.

Pak $\langle \{\vec{w}_1, \vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_{l-1}}\} \rangle = V$.

Zdůvodnění: Bud' $\vec{x} \in V$. Pak $\vec{x} = d_1 \vec{v}_1 + \dots + d_l \vec{v}_l$ pro nějaká $d_1, \dots, d_l \in T$. Ovšem

$$\vec{v}_j = \vec{w}_1 + \frac{-c_1}{c_j} \vec{v}_1 + \dots + \frac{-c_{j-1}}{c_j} \vec{v}_{j-1} + \frac{-c_{j+1}}{c_j} \vec{v}_{j+1} + \dots + \frac{-c_l}{c_j} \vec{v}_l, \text{ takže}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= d_1 \vec{v}_1 + \dots + d_{j-1} \vec{v}_{j-1} + d_j \left(\vec{w}_1 + \frac{-c_1}{c_j} \vec{v}_1 + \dots + \frac{-c_{j-1}}{c_j} \vec{v}_{j-1} + \frac{-c_{j+1}}{c_j} \vec{v}_{j+1} + \dots + \frac{-c_l}{c_j} \vec{v}_l \right) + \\ &+ d_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + d_l \vec{v}_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vidíme, že } \vec{x} &= d_j \vec{w}_1 + b_1 \vec{v}_1 + \dots + b_{j-1} \vec{v}_{j-1} + b_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + b_l \vec{v}_l = \\ &= d_j \vec{w}_1 + b_{i_1} \vec{v}_{i_1} + \dots + b_{i_{j-1}} \vec{v}_{i_{j-1}} + b_{i_j} \vec{v}_{i_j} + \dots + b_{i_{l-1}} \vec{v}_{i_{l-1}} \text{ pro jistá } b_{i_1}, \dots, b_{i_{l-1}} \in T. \end{aligned}$$

To znamená, že $\vec{x} \in \langle \{\vec{w}_1, \vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_{l-1}}\} \rangle$.

(II) $k > 1$

Vektory $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé. Podle indukčního předpokladu $k-1 \leq l$ a existují $j_1, \dots, j_{l-k+1} \in \{1, \dots, l\}$ tak, že $\langle \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}, \vec{v}_{j_1}, \dots, \vec{v}_{j_{l-k+1}}\} \rangle = V$. Kdyby $k > l$, bylo by $k-1 \geq l$, $k-1 = l$, $\langle \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}\} \rangle = V$. Pak by $\vec{w}_k = c_1 \vec{w}_1 + \dots + c_{k-1} \vec{w}_{k-1}$ pro jistá $c_1, \dots, c_{k-1} \in T$, takže vektory $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}, \vec{w}_k$ by byly lineárně závislé a to by byl spor. Proto $k \leq l$.

Existují $c_1, \dots, c_{k-1}, d_1, \dots, d_{l-k+1} \in T$ takové, že

$$\vec{w}_k = c_1 \vec{w}_1 + \dots + c_{k-1} \vec{w}_{k-1} + d_1 \vec{v}_{j_1} + \dots + d_{l-k+1} \vec{v}_{j_{l-k+1}}. \text{ Nutně existuje}$$

$p \in \{1, 2, \dots, l-k+1\}$, $d_p \neq 0$. Jinak by totiž $\vec{w}_k = c_1 \vec{w}_1 + \dots + c_{k-1} \vec{w}_{k-1}$, což by byl spor s lineární nezávislostí vektorů $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$. Položme

$$i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_{p-1} = j_{p-1}, i_p = j_p, i_{p+1} = j_{p+2}, \dots, i_{l-k} = j_{l-k+1}. \text{ Pak}$$

$$\langle \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_{l-k}}\} \rangle = V \text{ Zdůvodnění: Bud' } \vec{x} \in V. \text{ Pak}$$

$$\vec{x} = a_1 \vec{w}_1 + \dots + a_{k-1} \vec{w}_{k-1} + b_1 \vec{v}_{j_1} + \dots + b_{l-k+1} \vec{v}_{j_{l-k+1}} \text{ pro nějaká}$$

$$a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{l-k+1} \in T. \text{ Ovšem}$$

$$\vec{v}_{j_p} = \frac{1}{d_p} \cdot \vec{w}_k + \left(-\frac{c_1}{d_p}\right) \cdot \vec{w}_1 + \dots + \left(-\frac{c_{k-1}}{d_p}\right) \cdot \vec{w}_{k-1} + \left(-\frac{d_1}{d_p}\right) \cdot \vec{v}_{j_1} + \dots + \left(-\frac{d_{p-1}}{d_p}\right) \cdot \vec{v}_{j_{p-1}} + \left(-\frac{d_{p+1}}{d_p}\right) \cdot \vec{v}_{j_{p+1}} + \dots + \left(-\frac{d_{l-k+1}}{d_p}\right) \cdot \vec{v}_{j_{l-k+1}}.$$

Takže $\vec{x} = e_1 \cdot \vec{w}_1 + \dots + e_k \cdot \vec{w}_k + f_1 \cdot \vec{v}_{j_1} + \dots + f_{p-1} \cdot \vec{v}_{j_{p-1}} + f_p \cdot \vec{v}_{j_{p+1}} + \dots + f_{l-k} \cdot \vec{v}_{j_{l-k+1}} = e_1 \cdot \vec{w}_1 + \dots + e_k \cdot \vec{w}_k + f_1 \cdot \vec{v}_{i_1} + \dots + f_{p-1} \cdot \vec{v}_{i_{p-1}} + f_p \cdot \vec{v}_{i_p} + \dots + f_{l-k} \cdot \vec{v}_{i_{l-k}}$ pro nějaká $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_{l-k} \in T$. To znamená, že $\vec{x} \in \langle \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_{l-k}}\} \rangle$.

2.6. Souřadnice vektoru v bázi

2.6.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s bází B , $\vec{x} \in V$, $f: B \rightarrow T$. Zobrazení f se nazývá souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi B , jestliže

(1) $\{\vec{b} \in B | f(\vec{b}) \neq 0\}$ je konečná

(2) $\vec{x} = \sum_{b \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b}$

2.6.2. TVRZENÍ

Souřadnice vektoru v bázi vždy existují a jsou určeny jednoznačně.

Důkaz:

(I) existence:

Protože $\langle B \rangle = V$, existují $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_k \in T$, $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k \in B$, $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + c_k \cdot \vec{b}_k$.

Lze předpokládat, že $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ jsou navzájem různé vektory. Stačí položit

$f(\vec{b}) =$ a) c_i pro $\vec{b} = \vec{b}_i (i = 1, 2, \dots, k)$
b) 0 jinak.

(II) jednoznačnost:

Buďte f, g souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi B . Chceme: $f = g$. Označme

$C = \{\vec{b} \in B | f(\vec{b}) \neq 0\}$, $D = \{\vec{b} \in B | g(\vec{b}) \neq 0\}$. Jestliže $C = D = \emptyset$, pak zřejmě $f = g$. Necht' tedy $C \neq \emptyset$ nebo $D \neq \emptyset$. Připomeňme, že množiny C a D jsou konečné. Množina $C \cup D$ je také konečná; dále $C \cup D \neq \emptyset$.

Počítejme: $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = \sum_{\vec{b} \in C \cup D} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} - \sum_{\vec{b} \in C \cup D} g(\vec{b}) \cdot \vec{b} = \sum_{\vec{b} \in C \cup D} (f(\vec{b}) - g(\vec{b})) \cdot \vec{b}$.

Množina B je lineárně nezávislá. Je tedy lineárně nezávislá každá její podmnožina, tedy i množina $C \cup D$. Pak ovšem pro každé $\vec{b} \in C \cup D$ je $f(\vec{b}) - g(\vec{b}) = 0$, $f(\vec{b}) = g(\vec{b})$. Pokud $\vec{b} \in B - (C \cup D)$, je $f(\vec{b}) = 0 = g(\vec{b})$. Celkem $f(\vec{b}) = g(\vec{b})$ pro všechna $\vec{b} \in B$, $f = g$.

2.6.3. OZNAČENÍ

Souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi B budeme značit $S(\vec{x}, B)$.

2.6.4. POZNÁMKA

Pokud $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), je zobrazení $S(\vec{x}, B)$ jednoznačně určeno sloupцем souřadnic vektoru $\vec{x}$ v konečné bázi B :

$$\begin{pmatrix} S(\vec{x}, B)(\vec{b}_1) \\ S(\vec{x}, B)(\vec{b}_2) \\ \vdots \\ S(\vec{x}, B)(\vec{b}_n) \end{pmatrix}$$

Tento sloupec souřadnic budeme často ztotožňovat se zobrazením $S(\vec{x}, B)$, tj: budeme psát

$$S(\vec{x}, B) = \begin{pmatrix} S(\vec{x}, B)(\vec{b}_1) \\ S(\vec{x}, B)(\vec{b}_2) \\ \vdots \\ S(\vec{x}, B)(\vec{b}_n) \end{pmatrix}.$$

2.6.5. PŘÍKLAD

Uvažme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ a vektory $\vec{b}_1 = (1, 0)$, $\vec{b}_2 = (2, 2)$. Pak $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ je báze:

(a) množina B je lineárně nezávislá:

Nechť $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{0}$. Chceme: $c_1 = c_2 = 0$.

$$c_1 \cdot (1, 0) + c_2 \cdot (2, 2) = (0, 0)$$

$$(c_1, 0) + (2 \cdot c_2, 2 \cdot c_2) = (0, 0)$$

$$(c_1 + 2 \cdot c_2, 2 \cdot c_2) = (0, 0)$$

$$c_1 + 2 \cdot c_2 = 0$$

$$2 \cdot c_2 = 0$$

Řešení: $c_1 = c_2 = 0$.

(b) $\langle B \rangle = \mathbb{R}^2$:

Nechť $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Hledáme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tak, aby $c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{x}$, čili $c_1 + 2 \cdot c_2 = x_1$, $2 \cdot c_2 = x_2$.

Řešení: $c_1 = x_1 - x_2$, $c_2 = \frac{1}{2} \cdot x_2$.

Z výpočtu v části (b) vidíme, že $S(\vec{x}, B) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix}$. Speciálně, $S((0, 1), B) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$$S((11, 3), B) = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

2.7. Homomorfismus a izomorfismus vektorových prostorů

2.7.1. DEFINICE

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T , $\varphi: U \rightarrow V$. Zobrazení φ se nazývá homomorfismus, platí-li:

(1) Pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in U$: $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$.

(2) Pro všechna $c \in T$, pro všechna $\vec{x} \in U$: $\varphi(c \cdot \vec{x}) = c \cdot \varphi(\vec{x})$.

Zobrazení φ se nazývá izomorfismus, platí-li:

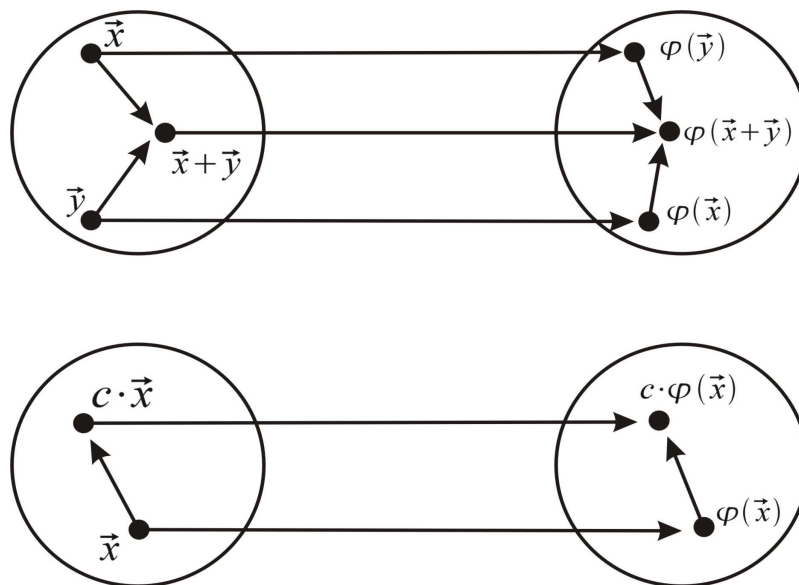
(1) φ je homomorfismus

(2) φ je bijekce.

Vektorové prostory U, V se nazývají izomorfní, pokud existuje nějaký izomorfismus U na V . Fakt, že U, V jsou izomorfní, zapisujeme $U \simeq V$.

2.7.2. POZNÁMKA

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T , $U \simeq V$. Pak existuje izomorfismus $\varphi: U \rightarrow V$.



Protože $\varphi: U \rightarrow V$ je bijekce, mají množiny U a V stejnou mohutnost, $|U|=|V|$. Volně lze tedy říci: U a V jsou stejné množiny; množinu V jsme získali z U přejmenováním prvků (prvek $\vec{x}$ se přejmenoval na $\varphi(\vec{x})$).

Navíc, jak je vidět na výše uvedených obrázcích, prvky z U a přejmenované prvky z V se stejně sčítají a stejně násobí skaláry.

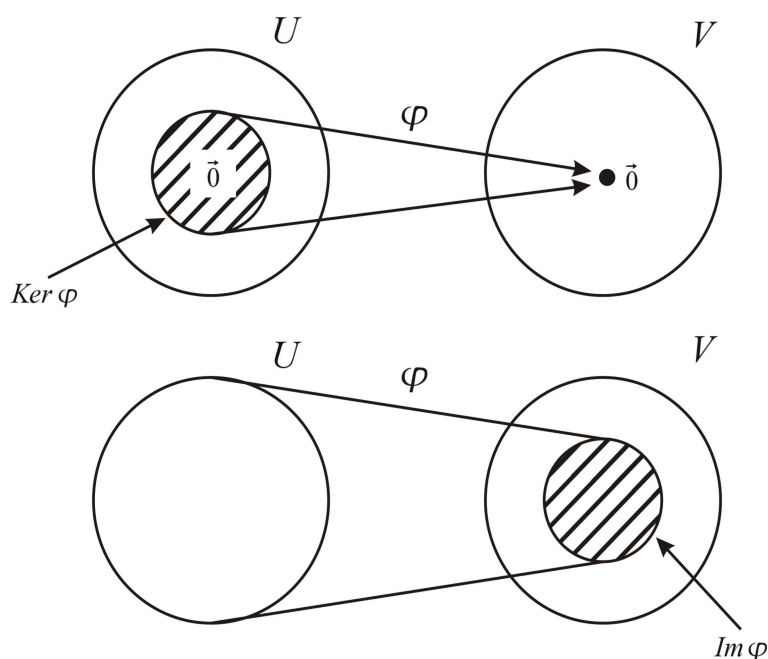
Můžeme shrnout (upozorňuji: opět jde o volné a intuitivní vyjádření): izomorfní vektorové prostory jsou stejné, liší se pouze pojmenováním svých prvků.

2.7.3. DEFINICE

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T , $\varphi: U \rightarrow V$ je homomorfismus.

Množina $\text{Ker } \varphi = \{\vec{x} \in U \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$ se nazývá jádro homomorfismu φ .

Množina $\text{Im } \varphi = \{\vec{y} \in V \mid \text{existuje } \vec{x} \in U, \varphi(\vec{x}) = \vec{y}\}$ se nazývá obraz homomorfismu φ .



2.7.4. VĚTA

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem T , $\varphi: U \rightarrow V$ je homomorfismus. Platí:

$\text{Ker } \varphi$ je podprostor vektorového prostoru U , $\text{Im } \varphi$ je podprostor vektorového prostoru V .

Důkaz: přenecháváme čtenáři.

2.8. Věta o reprezentaci vektorových prostorů

Nechť T je těleso, X je množina, $X \neq \emptyset$. Definujeme

$V(X) = \{f: X \rightarrow T \mid \text{množina } \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \text{ je konečná}\}$.

Dále pro libovolná $f, g \in V(X)$ a libovolné $c \in T$ definujeme $f+g, c \cdot f$ takto:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x)\end{aligned} \quad \text{pro každé } x \in X$$

Zřejmě $f+g, c \cdot f \in V(X)$.

2.8.1. TVRZENÍ

$V(X)$ je vektorový prostor nad tělesem T .

Důkaz přenecháváme čtenáři.

2.8.2. VĚTA (o reprezentaci vektorových prostorů)

Buď V netriviální vektorový prostor nad tělesem T . Pak existuje množina X tak, že vektorové prostory V a $V(X)$ jsou izomorfní.

Důkaz: Již víme, že ve V existuje báze (viz 2.4.4.). Označme ji B . Je $B \neq \emptyset$, protože jinak by vektorový prostor V byl triviální. Ukážeme, že $V(B)$ a V jsou izomorfní. Definujeme

$\varphi: V(B) \rightarrow V$ takto: $\varphi(f) = \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b}$ pro libovolné $f \in V(B)$. Definice zobrazení φ je

korektní, protože množina $\{\vec{b} \in B \mid f(\vec{b}) \neq 0\}$ je konečná.

(I) φ je homomorfismus

(a) Nechť $f, g \in V(B)$. Chceme: $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= \sum_{\vec{b} \in B} (f+g)(\vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \sum_{\vec{b} \in B} (f(\vec{b}) + g(\vec{b})) \cdot \vec{b} \\ &= \sum_{\vec{b} \in B} (f(\vec{b}) \cdot \vec{b} + g(\vec{b}) \cdot \vec{b}) \\ &= \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} + \sum_{\vec{b} \in B} g(\vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \varphi(f) + \varphi(g).\end{aligned}$$

(b) Nechť $f \in V(B)$, $c \in T$. Chceme: $\varphi(c \cdot f) = c \cdot \varphi(f)$.

$$\begin{aligned}\varphi(c \cdot f) &= \sum_{\vec{b} \in B} (c \cdot f)(\vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \sum_{\vec{b} \in B} (c \cdot f(\vec{b})) \cdot \vec{b} \\ &= \sum_{\vec{b} \in B} c \cdot (f(\vec{b}) \cdot \vec{b}) \\ &= c \cdot \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= c \cdot \varphi(f).\end{aligned}$$

(II) φ je bijekce

(a) φ je injekce

Nechť $f, g \in V(B)$, $\varphi(f) = \varphi(g)$. Chceme: $f = g$. Položme $\vec{x} = \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} = \sum_{\vec{b} \in B} g(\vec{b}) \cdot \vec{b}$.

Podle definice souřadnic vektoru (2.6.1.) je $f = S(\vec{x}, B)$, $g = S(\vec{x}, B)$, takže $f = g$ (souřadnice jsou určeny jednoznačně – viz 2.6.2.).

(b) φ je surjekce

Nechť $\vec{x} \in V$. Hledáme $f \in V(B)$ tak, aby $\varphi(f) = \vec{x}$, tj. $\sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{x}$. Stačí položit $f = S(\vec{x}, B)$.

2.8.3. DŮSLEDEK

Má-li vektorový prostor V nad tělesem T bázi s n vektory ($n \in \mathbb{N}$), pak V je izomorfní s T^n .

Důkaz: Buď B báze vektorového prostoru V , $|B| = n$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. V důkazu věty 2.8.2. jsme ukázali, že $V \simeq V(B)$. Stačí tedy ukázat, že $V(B) \simeq T^n$.

$$\begin{aligned} V(B) &= \{f: B \rightarrow T \mid \text{množina } \{\vec{b} \in B \mid f(\vec{b}) \neq 0\} \text{ je konečná}\} \\ &= \{f: B \rightarrow T\} \end{aligned}$$

Mezi množinami $V(B)$ a T^n zřejmě existuje vzájemně jednoznačná korespondence $f \rightarrow (f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), \dots, f(\vec{b}_n))$.

Dále,

$$\begin{aligned} f + g &\rightarrow ((f+g)(\vec{b}_1), (f+g)(\vec{b}_2), \dots, (f+g)(\vec{b}_n)) \\ &= (f(\vec{b}_1) + g(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2) + g(\vec{b}_2), \dots, f(\vec{b}_n) + g(\vec{b}_n)) \\ &= (f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), \dots, f(\vec{b}_n)) + (g(\vec{b}_1), g(\vec{b}_2), \dots, g(\vec{b}_n)) \\ c \cdot f &\rightarrow ((c \cdot f)(\vec{b}_1), (c \cdot f)(\vec{b}_2), \dots, (c \cdot f)(\vec{b}_n)) \\ &= (c \cdot f(\vec{b}_1), c \cdot f(\vec{b}_2), \dots, c \cdot f(\vec{b}_n)) \\ &= c \cdot (f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), \dots, f(\vec{b}_n)). \end{aligned}$$

Tudíž $V(B) \simeq T^n$.

2.8.4. POZNÁMKA

Věta o reprezentaci vektorových prostorů říká, že až na izomorfismus neexistují žádné jiné vektorové prostory než $V(X)$.

Kapitola 3 - Vektorové prostory konečné dimenze

3.1. Dimenze vektorového prostoru

3.1.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . V se nazývá vektorový prostor konečné dimenze, existuje-li $M \subseteq V$, M je konečná, $\langle M \rangle = V$.

3.1.2. PŘÍKLAD

(I) Bud' P_n množina všech polynomů stupně nejvýše n nad tělesem reálných čísel ($n \in \mathbb{N}$).

P_n lze považovat za vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, je-li sčítání polynomů definováno obvyklým způsobem

$(a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n) + (b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_n \cdot x^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x + \dots + (a_n + b_n) \cdot x^n$. a je-li též obvyklým způsobem definováno násobení polynomu reálným číslem

$c \cdot (a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n) = (c \cdot a_0) + (c \cdot a_1) \cdot x + \dots + (c \cdot a_n) \cdot x^n$. Vektorový prostor P_n má konečnou dimenzi, neboť například $\langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle = P_n$.

(II) Bud' P množina všech polynomů nad tělesem reálných čísel. Obdobně jak v části (I), P lze považovat za vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Ukážeme, že P nemá konečnou dimenzi.

Předpokládejme opak. Nechť $p_1, \dots, p_k \in P$, $\langle \{p_1, \dots, p_k\} \rangle = P$. Uvažme polynom

$p = c_1 \cdot p_1 + \dots + c_k \cdot p_k$, kde $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Pokud polynom p je nenulový, je stupeň $p \leq \max\{\text{stupeň } p_1, \dots, \text{stupeň } p_k\} = m$. Uvažujme polynom $x^{m+1} \in P$. Vidíme, že

$x^{m+1} \notin \langle \{p_1, \dots, p_k\} \rangle$, neboť stupeň $x^{m+1} = m+1 > m$. Dostali jsme spor. Takže vskutku P nemá konečnou dimenzi.

3.1.3. TVRZENÍ

(a) Z každé konečné množiny generátorů vektorového prostoru lze vybrat bázi.

(b) Každá báze prostoru konečné dimenze je konečná.

(c) Podprostor vektorového prostoru konečné dimenze je opět konečně dimenzionální.

Důkaz:

(a) Nechť $M \subseteq V$, M je konečná, $\langle M \rangle = V$. Uvažme následující systém množin S :

$$S = \{A \subseteq M \mid \langle A \rangle = V\}.$$

Protože $M \in S$, je $S \neq \emptyset$. Množina S je konečná ($|S| \leq 2^{|M|}$). Nechť $S = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$.

Lze předpokládat, že $|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_k|$. Stačí ukázat, že A_1 je minimální (vzhledem k inkluzi) podmnožina ve V splňující $\langle A_1 \rangle = V$. Dle 2.4.3. z toho vyplývá, že A_1 je báze a stačí si připomenout, že $A_1 \subseteq M$. Nechť tedy $B \subseteq A_1$, $\langle B \rangle = V$. Chceme: $B = A_1$. Stačí ukázat, že $|B| = |A_1|$. Nerovnost $|B| \leq |A_1|$ je jasná. Protože $B \subseteq A_1$, a $A_1 \subseteq M$, je $B \subseteq M$; také $\langle B \rangle = V$, takže $B \in S$, $B = A_i$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Tudíž $|A_1| \leq |A_i| = |B|$.

(b) Postupujeme sporem. Nechť B je báze, B je nekonečná. Nechť V je prostor konečné dimenze, $V = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\} \rangle$. Nechť $A \subseteq B$, $|A| = l+1$, $A = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{l+1}\}$. Protože množina B je lineárně nezávislá, je též lineárně nezávislá její konečná podmnožina A . Jsou tedy vektory $a_1, \dots, a_{l+1}$ lineárně nezávislé. Dle Steinitzovy věty o výměně (2.5.1.) je $l+1 \leq l$, $1 \leq 0$, spor.

(c) Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, nechť W je podprostor ve V . Bud' B báze podprostoru W (ta existuje dle 2.4.4. (a)). Stačí ukázat, že B je konečná.

Předpokládejme opak. Uvědomme si, že B je lineárně nezávislá množina ve V a aplikujeme 2.4.4.(b): existuje báze C prostoru V taková, že $B \subseteq C$. Množina C je nekonečná, protože množina B je nekonečná. Tedy V má nějakou nekonečnou bázi. To je ve sporu s již dokázanou částí (b).

3.1.4. VĚTA

Každé dvě báze vektorového prostoru konečné dimenze mají stejný počet vektorů.

Důkaz: Necht' V je vektorový prostor konečné dimenze, necht' B_1, B_2 jsou báze prostoru V .

Rozlišme tři případy:

(I) $B_1 = \emptyset$

(II) $B_2 = \emptyset$

(III) $B_1 \neq \emptyset$ a $B_2 \neq \emptyset$

ad (I): $\langle B_1 \rangle = \langle \emptyset \rangle = V$; ovšem $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$, takže $V = \{\vec{0}\}$. Pak nutně $B_2 = \emptyset$ a jsme hotovi.

ad (II): Tento případ je podobný případu (I).

ad (III): Necht' $B_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$, $B_2 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}$. Vektory $u_1, \dots, u_k$ jsou lineárně nezávislé a $\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\} \rangle = V$. Dle Steinitzovy věty o výměně (2.5.1.) je $k \leq l$. Naopak, vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ jsou lineárně nezávislé a $\langle \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} \rangle = V$. Dle Steinitzovy věty o výměně je $l \leq k$. Celkem: $k = l$.

Necht' V je vektorový prostor konečné dimenze. Uvědomme si tato fakta:

(I) V má bázi (viz 2.4.4.)

(II) Všechny báze prostoru V jsou konečné (viz 3.1.3.(b)).

(III) Všechny báze prostoru V mají stejný počet vektorů (viz 3.1.4.)

Má tedy smysl následující definice:

3.1.5. DEFINICE

Necht' V je vektorový prostor konečné dimenze. Dimenze vektorového prostoru V (označení: $\dim V$) je počet vektorů v kterékoli bázi prostoru V .

3.2. Věty o dimenzi

3.2.1. VĚTA

Necht' V_1, V_2 jsou vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem T .

Platí:

V_1, V_2 jsou izomorfní ($V_1 \simeq V_2$) právě tehdy, když $\dim V_1 = \dim V_2$.

Důkaz:

$\Rightarrow$: Bud' $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ izomorfismus. Rozlišme dva případy:

(I) V_1 je triviální

(II) V_1 není triviální

ad (I): Také V_2 je triviální a $0 = \dim V_1 = \dim V_2$.

ad (II): Bud' $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ báze prostoru V_1 . Necht' $C = \{\varphi(\vec{b}_1), \dots, \varphi(\vec{b}_n)\}$. Protože φ je injekce, $|C| = n = |B|$. Stačí tedy ukázat, že C je báze prostoru V_2 .

C je lineárně nezávislá:

Necht' $d_1, \dots, d_n \in T$, $d_1 \cdot \varphi(\vec{b}_1) + \dots + d_n \cdot \varphi(\vec{b}_n) = \vec{0}$.

Chceme: $d_1 = \dots = d_n = 0$.

Počítejme: $\varphi(d_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + d_n \cdot \vec{b}_n) = \varphi(d_1 \cdot \vec{b}_1) + \dots + \varphi(d_n \cdot \vec{b}_n) = d_1 \cdot \varphi(\vec{b}_1) + \dots + d_n \cdot \varphi(\vec{b}_n) = \vec{0}$.

Jelikož také $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ a φ je injekce, nutně $d_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + d_n \cdot \vec{b}_n = \vec{0}$. Protože vektory $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ jsou lineárně nezávislé, máme $d_1 = \dots = d_n = 0$.

$\langle C \rangle = V_2$:

Necht' $\vec{v} \in V_2$. Chceme: $\vec{v} \in \langle C \rangle$.

Protože φ je surjekce, existuje $\vec{u} \in V_1$ tak, že $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$. Protože $\langle B \rangle = V_1$, existují

$d_1, \dots, d_n \in T$ tak, že $d_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + d_n \cdot \vec{b}_n = \vec{u}$. Pak

$\vec{v} = \varphi(\vec{u}) = \varphi(d_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + d_n \cdot \vec{b}_n) = d_1 \cdot \varphi(\vec{b}_1) + \dots + d_n \cdot \varphi(\vec{b}_n)$ a $\vec{v} \in \langle C \rangle$.

$\Leftarrow$: Necht' $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Rozlišme dva případy:

(I) $n=0$ (II) $n>0$

ad (I): $V_1 = \{\vec{0}\}$, $V_2 = \{\vec{0}\}$, takže zřejmě V_1 a V_2 jsou izomorfní.

ad (II): Dle 2.8.3. V_1 a V_2 jsou izomorfní s T^n . Pak V_1 je izomorfní s V_2 .

3.2.2. VĚTA

Necht' V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T , W_1 a W_2 jsou podprostory ve V . Platí: $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$.

Důkaz: Nejdříve rozlišme dva případy:

(I) $W_1 \cap W_2$ je triviální (II) $W_1 \cap W_2$ není triviální

ad (I): Nyní rozlišme tři případy:

(a) W_1 je triviální

(b) W_2 je triviální

(c) W_1 není triviální, W_2 není triviální

ad (a): $W_1 + W_2 = \{\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} \in W_1, \vec{y} \in W_2\} = \{\vec{0} + \vec{y} | \vec{y} \in W_2\} = \{\vec{y} | \vec{y} \in W_2\} = W_2$

Tedy: $\dim W_1 + \dim W_2 = 0 + \dim W_2 = \dim W_2$,

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = 0 + \dim W_2 = \dim W_2$$

ad (b): Postupujeme obdobně jak v případě (a).

ad (c): Necht' $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ je báze podprostoru W_1 , necht' $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}$ je báze podprostoru W_2 . Ukážeme, že $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}$ je báze podprostoru $W_1 + W_2$. Zřejmě

$$\langle \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\} \rangle = W_1 + W_2 . \text{ Necht' } c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in T ,$$

$$c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k + d_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + d_l \cdot \vec{v}_l = \vec{0} . \text{ Pak } c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k = (-d_1) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (-d_l) \cdot \vec{v}_l \in W_1 \cap W_2 .$$

Jelikož $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, máme $c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k = \vec{0} = d_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + d_l \cdot \vec{v}_l$. Protože vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, $c_1 = \dots = c_k = 0$. Protože vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ jsou lineárně závislé, $d_1 = \dots = d_l = 0$. Ukázali jsme, že vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ jsou lineárně nezávislé. Tím je ukončen důkaz faktu, že $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}$ je báze podprostoru $W_1 + W_2$. Nyní počítejme: $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = 0 + (k + l) = \dim W_1 + \dim W_2$.

ad (II): Nyní opět rozlišme tři případy:

(a) $W_1 \subseteq W_2$

(b) $W_2 \subseteq W_1$

(c) $W_1 \not\subseteq W_2$ a $W_2 \not\subseteq W_1$ (tj. $W_1 \cap W_2 \subset W_1$, $W_1 \cap W_2 \subset W_2$)

ad (a): $W_1 \cap W_2 = W_1$, $W_1 \cup W_2 = W_2$, takže

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 .$$

ad (b): Postupujeme obdobně jak v případě (a).

ad (c): Buď $\{e_1, \dots, e_k\}$ báze podprostoru $W_1 \cap W_2$. Dle 2.4.4.(b) existují vektory

$$\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p \in W_1 \text{ (} p \in \mathbb{N} \text{) takové, že } \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p\} \text{ je báze podprostoru } W_1 .$$

Obdobně existují vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q \in W_2$ takové, že $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\}$ je báze podprostoru W_2 . Ukážeme, že $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\}$ je báze podprostoru $W_1 + W_2$. Zřejmě $\langle \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\} \rangle = W_1 + W_2$. Necht'

$$a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q \in T ,$$

$$a_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + a_k \cdot \vec{e}_k + b_1 \cdot \vec{f}_1 + \dots + b_p \cdot \vec{f}_p + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_q \cdot \vec{g}_q = \vec{0} .$$

Položme $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + a_k \cdot \vec{e}_k + b_1 \cdot \vec{f}_1 + \dots + b_p \cdot \vec{f}_p$. Zřejmě $\vec{x} \in W_1$. Ovšem

$$\vec{x} = (-c_1) \cdot \vec{g}_1 + \dots + (-c_q) \cdot \vec{g}_q , \text{ takže také } \vec{x} \in W_2 . \text{ Zjistili jsme, že } \vec{x} \in W_1 \cap W_2 . \text{ Pak}$$

$$\vec{x} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{e}_k \text{ pro jistá } d_1, \dots, d_k \in T . \text{ Potom}$$

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{e}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_q \cdot \vec{g}_q . \text{ Z lineární nezávislosti vektorů}$$

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q \text{ dostáváme } d_1 = \dots = d_k = c_1 = \dots = c_q = 0 . \text{ Tudíž } \vec{x} = \vec{0} . \text{ Lineární}$$

nezávislost vektorů $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p$ dává $a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_p = 0$. Podařilo se nám

dokázat, že vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q$ jsou lineárně nezávislé. Je tedy ukončen důkaz faktu, že $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\}$ je báze podprostoru $W_1 + W_2$. Nyní $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = k + (k + p + q) = (k + p) + (k + q) = \dim W_1 + \dim W_2$.

3.2.3. VĚTA

Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T , nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , nechť $\varphi: U \rightarrow V$ je homomorfismus.

Platí: $\dim(\operatorname{Im} \varphi) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi) = \dim U$.

Důkaz: Rozlišme dva případy:

(I) $\operatorname{Ker} \varphi$ je triviální

(II) $\operatorname{Ker} \varphi$ není triviální

ad (I): Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in U$, $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y})$. Pak $\varphi(\vec{x} - \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y}) = \vec{0}$, $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker} \varphi = \{\vec{0}\}$, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$, $\vec{x} = \vec{y}$. Vidíme, že zobrazení φ je prosté. Takže $\varphi: U \rightarrow \operatorname{Im} \varphi$ je izomorfismus.

Dle 3.2.1. $\dim U = \dim(\operatorname{Im} \varphi)$

Celkem tedy: $\dim(\operatorname{Im} \varphi) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi) = \dim U + 0 = \dim U$.

ad (II): Rozlišme dva případy:

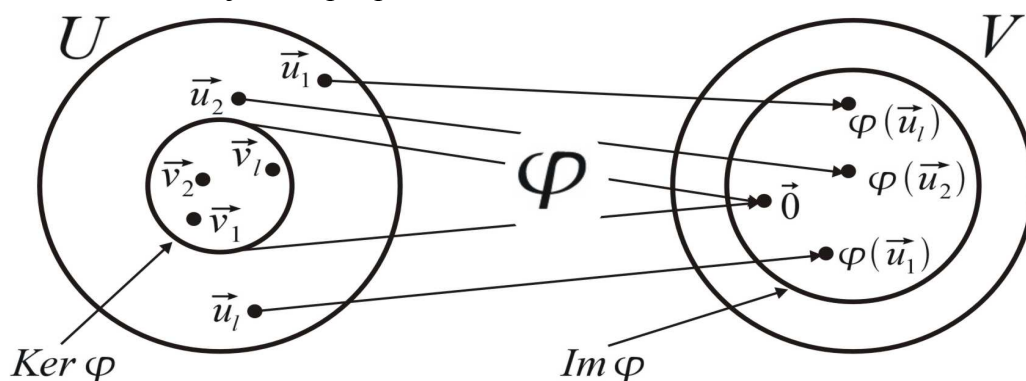
(a) $\operatorname{Ker} \varphi = U$

(b) $\operatorname{Ker} \varphi \subset U$

ad (a): Pro každé $\vec{x} \in U$ je $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ takže $\operatorname{Im} \varphi = \{\vec{0}\}$. Pak

$\dim(\operatorname{Im} \varphi) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi) = 0 + \dim U = \dim U$.

ad (b): Bud' $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ báze podprostoru $\operatorname{Ker} \varphi$. Dle 2.4.4.(b) existují vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l$ ($l \in \mathbb{N}$) takové, že $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l\}$ je báze prostoru U . Ukážeme, že $\{\varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_l)\}$ je báze podprostoru $\operatorname{Im} \varphi$.



$\langle \{\varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_l)\} \rangle = \operatorname{Im} \varphi$:

$\subseteq$: Stačí si uvědomit, že $\{\varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_l)\} \subseteq \operatorname{Im} \varphi$.

$\supseteq$: Nechť $\vec{y} \in \operatorname{Im} \varphi$. Existuje $\vec{x} \in U$ tak, že $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$. Existují $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in T$, $\vec{x} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{v}_k + d_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + d_l \cdot \vec{u}_l$. Pak

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \varphi(\vec{x}) = \varphi(c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{v}_k + d_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + d_l \cdot \vec{u}_l) \\ &= c_1 \cdot \varphi(\vec{v}_1) + \dots + c_k \cdot \varphi(\vec{v}_k) + d_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1) + \dots + d_l \cdot \varphi(\vec{u}_l) \\ &= c_1 \cdot \vec{0} + \dots + c_k \cdot \vec{0} + d_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1) + \dots + d_l \cdot \varphi(\vec{u}_l) \\ &= d_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1) + \dots + d_l \cdot \varphi(\vec{u}_l) \in \langle \{\varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_l)\} \rangle. \end{aligned}$$

Vektory $\varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_l)$ jsou lineárně nezávislé: Nechť $a_1, \dots, a_l \in T$,

$a_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1) + \dots + a_l \cdot \varphi(\vec{u}_l) = \vec{0}$. Chceme: $a_1 = \dots = a_l = 0$. Je

$\vec{0} = a_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1) + \dots + a_l \cdot \varphi(\vec{u}_l) = \varphi(a_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + a_l \cdot \vec{u}_l)$. Vidíme, že $a_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + a_l \cdot \vec{u}_l \in \operatorname{Ker} \varphi$.

Existují tedy $b_1, \dots, b_k \in T$, $a_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + a_l \cdot \vec{u}_l = b_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + b_k \cdot \vec{v}_k$. Pak

$b_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + b_k \cdot \vec{v}_k + (-a_1) \cdot \vec{u}_1 + \dots + (-a_l) \cdot \vec{u}_l = \vec{0}$. Z lineární nezávislosti vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l$ vyplývá $a_1 = \dots = a_l = 0$.

Konečně, $\dim(\operatorname{Im} \varphi) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi) = l + k = \dim U$.

Kapitola 4 – Euklidovské prostory

4.1. Definice euklidovského prostoru

4.1.1. DEFINICE

Nechť E je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, $(\cdot, \cdot): E^2 \rightarrow \mathbb{R}$. E se nazývá euklidovský prostor, platí-li:

- (I) Pro všechna $\vec{u} \in E$: $(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$.
 - (II) Pro všechna $\vec{u} \in E$: $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ právě tehdy, když $\vec{u} = \vec{0}$.
 - (III) Pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in E$: $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$.
 - (IV) Pro všechna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$: $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$.
 - (V) Pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pro všechna $c \in \mathbb{R}$: $(\vec{u}, c \cdot \vec{v}) = c \cdot (\vec{u}, \vec{v})$.
- Pro $\vec{u}, \vec{v} \in E$ se číslo $(\vec{u}, \vec{v})$ nazývá skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

4.1.2. PŘÍKLAD

Uvažme vektorový prostor $\mathbb{R}^n$. Definujeme $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + \dots + x_n \cdot y_n$ pro libovolná $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak $\mathbb{R}^n$ je euklidovský prostor.

4.2. Cauchyova nerovnost

4.2.1. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{v} \in E$. Normou vektoru $\vec{v}$ rozumíme číslo $\sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$. Normu vektoru $\vec{v}$ značíme $\|\vec{v}\|$.

4.2.2. VĚTA (Cauchyova)

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Platí: $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé vektory.

Důkaz: Rozlišíme dva případy:

- (I) $\vec{y} = \vec{0}$
- (II) $\vec{y} \neq \vec{0}$

ad (I): $|(\vec{x}, \vec{y})| = |(\vec{x}, \vec{0})| = |0| = 0$, $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{0}\| = \|\vec{x}\| \cdot 0 = 0$. Uvědomme si také, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$, tj. vektory $\vec{x}$ a $\vec{0}$, jsou lineárně závislé.

ad (II): Pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ položíme $f(c) = (\vec{x} - c \cdot \vec{y}, \vec{x} - c \cdot \vec{y})$. Platí:

$0 \leq f(c) = (\vec{x}, \vec{x}) - 2 \cdot c \cdot (\vec{x}, \vec{y}) + c^2 \cdot (\vec{y}, \vec{y})$. Je $(\vec{y}, \vec{y}) > 0$. Kvadratická trojčlen $f(c)$ s reálnými koeficienty má nekladný diskriminant, tj. $(\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}) \leq 0$. Pak $\sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$, čili $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Rovnost nastává právě tehdy, když $f(c)$ má nulový diskriminant, a to je právě tehdy, když existuje $c_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $f(c_0) = (\vec{x} - c_0 \cdot \vec{y}, \vec{x} - c_0 \cdot \vec{y}) = 0$ a to je právě tehdy, když existuje $c_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $\vec{x} = c_0 \cdot \vec{y}$, a to je právě tehdy, když vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé.

4.3. Norma a metrika

4.3.1. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{v}, \vec{w} \in E$, $c \in \mathbb{R}$. Platí:

- (a) $\|\vec{v}\| \geq 0$
- (b) $\|\vec{v}\| = 0$ právě tehdy, když $\vec{v} = \vec{0}$
- (c) $\|c \cdot \vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$
- (d) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Důkaz:

- (a) Důkaz přenecháváme čtenáři.
- (b) Důkaz přenecháváme čtenáři.

(c) Důkaz přenecháváme čtenáři.

$$(d) \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{v}) + 2 \cdot (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ = \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot (\vec{v}, \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot |(\vec{v}, \vec{w})| + \|\vec{w}\|^2.$$

Podle Cauchyovy nerovnosti je $|(\vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$, takže

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 = (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2. \text{ Odtud máme: } \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

4.3.2. DEFINICE

Nechť M je množina, $\rho: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Zobrazení ρ se nazývá metrika na množině M , platí-li:

(I) Pro všechna $x, y \in M$: $\rho(x, y) \geq 0$.

(II) Pro všechna $x, y \in M$: $\rho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$.

(III) Pro všechna $x, y \in M$: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(IV) Pro všechna $x, y, z \in M$: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

4.3.3. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor. Platí: Zobrazení $\rho: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované vztahem

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad (\text{pro každé } \vec{x}, \vec{y} \in E) \text{ je metrika na množině } E.$$

Důkaz: Ověříme, že zobrazení ρ splňuje podmínky (I) – (IV) z definice 4.3.2.

(I) ověření přenecháváme čtenáři

(II) ověření přenecháváme čtenáři

(III) ověření přenecháváme čtenáři

(IV) Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$. Chceme: $\rho(\vec{x}, \vec{z}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$.

$$\rho(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x} - \vec{z}\| = \|(\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z})\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z}) \quad (\text{využili jsme trojúhelníkovou nerovnost – viz 4.3.1.}).$$

4.4. Ortogonalita, velikost úhlu vektorů

4.4.1. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Říkáme, že vektor $\vec{x}$ je ortogonální k vektoru $\vec{y}$, pokud $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Označení $\vec{x} \perp \vec{y}$.

4.4.2. POZNÁMKA

$(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ právě tehdy, když $(\vec{y}, \vec{x}) = 0$, neboť $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$. Takže $\vec{x} \perp \vec{y}$ právě tehdy, když $\vec{y} \perp \vec{x}$. Proto říkáme, že vektory $\vec{x}, \vec{y}$ jsou vzájemně ortogonální.

4.4.3. VĚTA (Pythagorova)

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Platí:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \text{ právě tehdy, když } \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Důkaz: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2 \cdot (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \cdot (\vec{x}, \vec{y})$. Vidíme, že $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow 2 \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$.

Poznatek:

Nechť E je euklidovský prostor $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Podle Cauchyovy nerovnosti (4.2.2.)

platí: $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. Pak $\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1$, neboli ekvivalentně $-1 \leq \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1$.

Pak existuje právě jedno $\alpha \in [0, \pi]$ tak, že $\cos \alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$.

Tento poznatek ospravedlňuje následující definici.

4.4.4. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Nechť $\alpha \in [0, \pi]$, $\cos \alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$.
Číslo α se nazývá velikost úhlu vektorů $\vec{x}, \vec{y}$.

4.5. Ortogonální báze

4.5.1. TVRZENÍ

Nechť E je euklidovský prostor, $n \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in E - \{\vec{0}\}$. Jestliže $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$ pro každé $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, pak vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Nechť $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$. Chceme: $c_1 = \dots = c_n = 0$. Bud' $i \in \{1, \dots, n\}$. Platí:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{0}, \vec{v}_i) = (c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n, \vec{v}_i) \\ &= c_1 \cdot (\vec{v}_1, \vec{v}_i) + \dots + c_{i-1} \cdot (\vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i) + c_i \cdot (\vec{v}_i, \vec{v}_i) + c_{i+1} \cdot (\vec{v}_{i+1}, \vec{v}_i) + \dots + c_n \cdot (\vec{v}_n, \vec{v}_i) \\ &= c_1 \cdot 0 + \dots + c_{i-1} \cdot 0 + c_i \cdot (\vec{v}_i, \vec{v}_i) + c_{i+1} \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 \\ &= c_i \cdot (\vec{v}_i, \vec{v}_i). \end{aligned}$$

Protože $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, je $(\vec{v}_i, \vec{v}_i) \neq 0$ a tudíž $c_i = 0$.

4.5.2. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, $B \subseteq E$. B se nazývá ortogonální báze prostoru E , platí-li:

(I) B je báze vektorového prostoru E .

(II) Pro všechny vektory $\vec{x}, \vec{y} \in B$: Jestliže $\vec{x} \neq \vec{y}$, pak $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Je-li navíc splněna podmínka

(III) Pro všechny vektory $\vec{x} \in B$: $\|\vec{x}\| = 1$.

nazývá se B ortonormální báze prostoru E .

4.5.3. ALGORITMUS (Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces)

Nechť E je euklidovský prostor.

VSTUP: Lineárně nezávislé vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

VÝSTUP: Nenulové vektory $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ splňující $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \rangle$ a $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

PROCES: Na počátku klademe $\vec{g}_1 = \vec{v}_1$. Nechť $1 < k \leq n$ a nechť jsou již sestrojeny vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}$. Klademe $\vec{g}_k = \vec{v}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_{k-1} \cdot \vec{g}_{k-1}$, kde

$$c_1 = -\frac{(\vec{g}_1, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}, c_2 = -\frac{(\vec{g}_2, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_2, \vec{g}_2)}, \dots, c_{k-1} = -\frac{(\vec{g}_{k-1}, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_{k-1})}.$$

Důkaz korektnosti algoritmu: Indukcí pro $k = 1, 2, \dots, n$ dokážeme:

(I) vektory $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_k$ jsou nenulové.

(II) $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$.

(III) $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$.

$k = 1$:

ad (I) $\vec{g}_1 = \vec{0}$ by znamenalo, že $\vec{v}_1 = \vec{0}$ a že vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jsou lineárně závislé; to by byl spor. Takže $\vec{g}_1 \neq \vec{0}$.

ad (II): zřejmě platí

ad (III): zřejmě platí

$k > 1$:

ad (I): Z indukčního předpokladu víme, že vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}$ jsou nenulové. Zbývá ukázat, že $\vec{g}_k \neq \vec{0}$. Předpokládejme opak, tj. $\vec{g}_k = \vec{0}$. Pak

$$\vec{v}_k = (-c_1) \cdot \vec{g}_1 + \dots + (-c_{k-1}) \cdot \vec{g}_{k-1} \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle$$

Ovšem dle indukčního předpokladu $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle$, takže $\vec{v}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle$. Tedy vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k$ nejsou lineárně nezávislé. Pak též vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k, \dots, \vec{v}_n$ nejsou lineárně nezávislé, spor. Nutně tedy $\vec{g}_k \neq \vec{0}$.

ad (II): $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$: Stačí ukázat, že $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$. Dle indukčního předpokladu $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle$, takže $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1} \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k\} \rangle$. Zbývá ukázat, že $\vec{g}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$. Víme, že $\vec{g}_k = \vec{v}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_{k-1} \cdot \vec{g}_{k-1}$. Ovšem $\vec{v}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1} \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$, takže $\vec{g}_k \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$.
 $\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$:

Stačí ukázat, že $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$. Dle indukčního předpokladu

$\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle$, takže $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1} \in \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\} \rangle = \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{k-1}, \vec{g}_k\} \rangle$. Zbývá ukázat, že $\vec{v}_k \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$. Víme, že $\vec{v}_k = (-c_1) \cdot \vec{g}_1 + \dots + (-c_{k-1}) \cdot \vec{g}_{k-1} + \vec{g}_k$. Nutně tedy $\vec{v}_k \in \langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\} \rangle$.

ad (III): Necht' $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$. Chceme: $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$. Jestliže $i, j \leq k-1$, pak $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$ dle indukčního předpokladu. Zbývá tedy ukázat, že $\vec{g}_k \perp \vec{g}_1, \vec{g}_k \perp \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_k \perp \vec{g}_{k-1}$. Zvolíme libovolně $i \in \{1, \dots, k-1\}$ a počítáme:

$$(\vec{g}_k, \vec{g}_i) = (\vec{v}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \dots + c_{k-1} \cdot \vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i) =$$

$$= (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + c_1 \cdot (\vec{g}_1, \vec{g}_i) + \dots + c_{i-1} \cdot (\vec{g}_{i-1}, \vec{g}_i) + c_i \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) + c_{i+1} \cdot (\vec{g}_{i+1}, \vec{g}_i) + \dots + c_{k-1} \cdot (\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i).$$

Ještě jednou si uvědomme, že dle indukčního předpokladu

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_i) = 0, \dots, (\vec{g}_{i-1}, \vec{g}_i) = 0, (\vec{g}_{i+1}, \vec{g}_i) = 0, \dots, (\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_i) = 0. \text{ Pak}$$

$$(\vec{g}_k, \vec{g}_i) = (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + c_1 \cdot 0 + \dots + c_{i-1} \cdot 0 + c_i \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) + c_{i+1} \cdot 0 + \dots + c_{k-1} \cdot 0 =$$

$$= (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + c_i \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) = (\vec{v}_k, \vec{g}_i) + \left(-\frac{(\vec{g}_i, \vec{v}_k)}{(\vec{g}_i, \vec{g}_i)} \right) \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_i) =$$

$$= (\vec{v}_k, \vec{g}_i) - (\vec{g}_i, \vec{v}_k) = 0.$$

Tudíž $\vec{g}_k \perp \vec{g}_i$.

4.5.4. VĚTA

V každém euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortogonální báze.

Důkaz: Necht' E je euklidovský prostor konečné dimenze. Necht' $\dim E = n$. Je-li $n=0$, je $\emptyset$ ortogonální báze prostoru E . Necht' $n > 0$. Necht' $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ je báze prostoru E .

Aplikujeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces (4.5.3.) na vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Obdržíme vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$. Ukážeme, že $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$ je ortogonální báze prostoru E .

Víme, že $\langle \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \rangle = E$. Dále, $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Zbývá dokázat, že vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ jsou lineárně nezávislé. To ihned plyne z 4.5.1.

(Uvědomme si, že vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ jsou nenulové).

4.5.5. DŮSLEDEK

V každém netriviálním euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortonormální báze.

Důkaz: Necht' E je netriviální euklidovský prostor konečné dimenze. Dle 4.5.4. existuje ortogonální báze B prostoru E . Necht' $B = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$ ($n = \dim E$). Je $\vec{g}_i \neq \vec{0}$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ - jinak bychom měli spor s lineární nezávislostí vektorů $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$. Položme

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{g}_1\|} \cdot \vec{g}_1, \dots, \vec{e}_n = \frac{1}{\|\vec{g}_n\|} \cdot \vec{g}_n. \text{ Ukážeme: } \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \text{ je ortonormální báze prostoru } E.$$

Protože $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ jsou nenulové, jsou též $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ nenulové. Necht' $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Počítáme:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \left(\frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \vec{g}_i, \frac{1}{\|\vec{g}_j\|} \cdot \vec{g}_j \right) = \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{g}_j\|} \cdot (\vec{g}_i, \vec{g}_j) = 0, \text{ neboť } \vec{g}_i \perp \vec{g}_j. \text{ Takže } \vec{e}_i \perp \vec{e}_j.$$

Dále: Necht' $i \in \{1, \dots, n\}$. Počítejme $\|\vec{e}_i\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \vec{g}_i \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \right| \cdot \|\vec{g}_i\| = \frac{1}{\|\vec{g}_i\|} \cdot \|\vec{g}_i\| = 1$.

Protože $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ jsou nenulové a $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, jsou vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ lineárně nezávislé (viz 4.5.1.). Jelikož $\dim E = n$, je $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ báze prostoru E , která je ortonormální.

4.6. Izomorfismus euklidovských prostorů

4.6.1. DEFINICE

Necht' E_1 je euklidovský prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)_1$, necht' E_2 je euklidovský prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)_2$, $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$. Zobrazení φ se nazývá izomorfismus euklidovských prostorů E_1 a E_2 platí-li:

(I) φ je izomorfismus vektorových prostorů E_1 a E_2 .

(II) Pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in E_1$ platí: $(\vec{x}, \vec{y})_1 = (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))_2$.

Pokud existuje izomorfismus euklidovských prostorů E_1 a E_2 , říkáme, že prostory E_1 a E_2 jsou izomorfní.

4.7. Věta o reprezentaci euklidovských prostorů konečné dimenze

4.7.1. VĚTA (o reprezentaci euklidovských prostorů konečné dimenze)

Necht' E je euklidovský prostor konečné dimenze, $\dim E = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Platí: euklidovské prostory E a $\mathbb{R}^n$ jsou izomorfní.

Důkaz: Dle 4.5.5. existuje ortonormální báze $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ euklidovského prostoru E . Pro každé $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ položíme $\varphi(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$. Zřejmě φ zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do E . Ukážeme, že φ je izomorfismus euklidovských prostorů:

(I) φ je izomorfismus vektorových prostorů $\mathbb{R}^n$ a E .

(a) φ je homomorfismus

Necht' $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Chceme: $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x} + \vec{y}) &= \varphi((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) = \varphi((x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)) \\ &= (x_1 + y_1) \cdot \vec{e}_1 + \dots + (x_n + y_n) \cdot \vec{e}_n = x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n + y_n \cdot \vec{e}_n \\ &= (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) + (y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}). \end{aligned}$$

Necht' $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Chceme: $\varphi(c \cdot \vec{x}) = c \cdot \varphi(\vec{x})$.

$$\begin{aligned} \varphi(c \cdot \vec{x}) &= \varphi(c \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \varphi((c \cdot x_1, \dots, c \cdot x_n)) = (c \cdot x_1) \cdot \vec{e}_1 + \dots + (c \cdot x_n) \cdot \vec{e}_n \\ &= c \cdot (x_1 \cdot \vec{e}_1) + \dots + c \cdot (x_n \cdot \vec{e}_n) = c \cdot (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) = c \cdot \varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

(b) φ je injekce

Necht' $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y})$. Chceme: $\vec{x} = \vec{y}$.

$$\vec{0} = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y}) = (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n) - (y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n) = (x_1 - y_1) \cdot \vec{e}_1 + \dots + (x_n - y_n) \cdot \vec{e}_n.$$

Vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ jsou lineárně nezávislé, takže $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$, což dává

$$x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

(c) φ je surjekce

Necht' $\vec{y} \in E$. Chceme: existuje $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$. Víme, že $\langle B \rangle = E$. Existují tedy

$$y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}, \vec{y} = y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n. \text{ Položíme } \vec{x} = (y_1, \dots, y_n). \text{ Pak}$$

$$\varphi(\vec{x}) = y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n = \vec{y}.$$

(II) Necht' $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Chceme: $(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))$.

$$\begin{aligned}
(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) &= (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n, y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n) \\
&= (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n, y_1 \cdot \vec{e}_1) + \dots + (x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n, y_n \cdot \vec{e}_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \vec{e}_i, y_1 \cdot \vec{e}_1) + \dots + \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \vec{e}_i, y_n \cdot \vec{e}_n) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_1 \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_1) + \dots + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_n \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_n).
\end{aligned}$$

Uvědomme si, že $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Pak

$$\begin{aligned}
(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) &= x_1 \cdot y_1 \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + x_2 \cdot y_2 \cdot (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \dots + x_n \cdot y_n \cdot (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot \|\vec{e}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot 1^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = (\vec{x}, \vec{y}).
\end{aligned}$$

4.8. Ortogonální doplněk podprostoru

4.8.1. DEFINICE

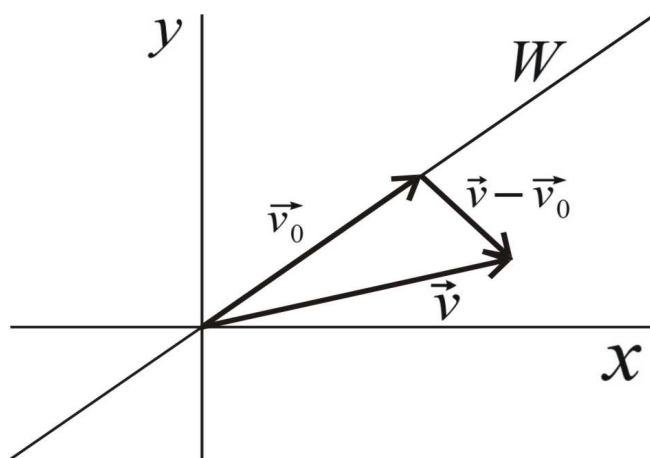
Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E . Říkáme, že vektor $\vec{v}$ je ortogonální k podprostoru W , jestliže $\vec{v} \perp \vec{x}$ pro každý vektor $\vec{x} \in W$ (značení: $\vec{v} \perp W$).

4.8.2. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E . Množina $\{\vec{v} \in E \mid \vec{v} \perp W\}$ se nazývá ortogonální doplněk podprostoru W (v prostoru E). Označení: $W^\perp$.

4.8.3. DEFINICE

Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E , $\vec{v} \in E$. Vektor $\vec{v}_0 \in W$ se nazývá ortogonální průmět vektoru $\vec{v}$ do podprostoru W , jestliže $\vec{v} - \vec{v}_0 \perp W$.



4.8.4. TVRZENÍ

Ortogonální průmět vektoru do podprostoru konečné dimenze vždy existuje a je určen jednoznačně.

Důkaz: Buď E euklidovský prostor, W jeho podprostor konečné dimenze, $\vec{v} \in E$.

Rozlišme dva případy:

(I) W je triviální.

Položíme $\vec{v}_0 = \vec{0}$. Jiná možnost ani není.

(II) W je netriviální.

Podle 4.5.5. existuje ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ podprostoru W ($k = \dim W$). Nejdříve si uvědomme: $\vec{x} \perp W$ právě tehdy, když $\vec{x} \perp \vec{e}_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$. ($\vec{x}$ je libovolný vektor z E).

Zdůvodnění:

Nechť $\vec{y} \in W$, $\vec{x} \perp \vec{e}_i$ pro $i=1, \dots, k$. Chceme: $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Existují $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ tak, že $\vec{y} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{e}_k$.

Pak $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, d_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + d_k \cdot \vec{e}_k) = d_1 \cdot (\vec{x}, \vec{e}_1) + \dots + d_k \cdot (\vec{x}, \vec{e}_k) = d_1 \cdot 0 + \dots + d_k \cdot 0 = 0$.

Takže $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Hledáme $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tak, aby $\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k) \perp \vec{e}_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$. K ukončení důkazu tvrzení stačí ukázat, že následující systém k rovnic o neznámých $c_1, \dots, c_k$ má právě jedno řešení:

$$(\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_1) = 0$$

$\vdots$

$$(\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_k) = 0.$$

Soustavu označíme $*$.

Nechť $i \in \{1, \dots, k\}$. Počítejme:

$$(\vec{v} - (c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_i) = (\vec{v}, \vec{e}_i) - ((c_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{e}_k), \vec{e}_i)$$

$$= (\vec{v}, \vec{e}_i) - \sum_{j=1}^k c_j \cdot (\vec{e}_j, \vec{e}_i) = (\vec{v}, \vec{e}_i) - c_i \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_i)$$

$$= (\vec{v}, \vec{e}_i) - c_i \cdot 1 = (\vec{v}, \vec{e}_i) - c_i.$$

Soustava $(*)$ má tedy tvar

$$(\vec{v}, \vec{e}_1) - c_1 = 0$$

$\vdots$

$$(\vec{v}, \vec{e}_k) - c_k = 0$$

a je vidět, že má právě jedno řešení.

4.8.5. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor, W je podprostor prostoru E .

Platí: $W^\perp$ je podprostor prostoru E a (v případě, že E má konečnou dimenzi)

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim E, \quad W + W^\perp = E.$$

Důkaz:

(I) Dokážeme, že $W^\perp$ je podprostor.

Nechť $\vec{u}, \vec{v} \in W^\perp$. Chceme: $\vec{u} + \vec{v} \in W^\perp$.

Nechť $\vec{x} \in W$. Počítejme: $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{x}) = (\vec{u}, \vec{x}) + (\vec{v}, \vec{x}) = 0 + 0 = 0$, tedy $\vec{u} + \vec{v} \perp W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W^\perp$.

Nechť $\vec{u} \in W^\perp$, $c \in \mathbb{R}$. Chceme: $c \cdot \vec{u} \in W^\perp$.

Nechť $\vec{x} \in W$. Počítejme:

$$(c \cdot \vec{u}, \vec{x}) = c \cdot (\vec{u}, \vec{x}) = c \cdot 0 = 0. \text{ Tedy } c \cdot \vec{u} \perp W, \quad c \cdot \vec{u} \in W^\perp.$$

Ještě chceme: $\vec{0} \in W^\perp$. Zřejmě pro každé $\vec{x} \in W$ je $(\vec{0}, \vec{x}) = 0$, tedy $\vec{0} \perp W$, $\vec{0} \in W^\perp$.

(II) Předpokládejme, že E má konečnou dimenzi. Nejdříve dokážeme, že $W + W^\perp = E$.

$W + W^\perp \subseteq E$: To je jasné.

$E \subseteq W + W^\perp$: Nechť $\vec{v} \in E$. Protože E má konečnou dimenzi, má konečnou dimenzi též podprostor W . Dle 4.8.4. existuje ortogonální průmět $\vec{v}_0$ vektoru $\vec{v}$ do prostoru W . Platí:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + (\vec{v} - \vec{v}_0), \quad \vec{v}_0 \in W, \quad \vec{v} - \vec{v}_0 \perp W, \text{ tj. } \vec{v} - \vec{v}_0 \in W^\perp. \text{ Vidíme, že } \vec{v} \in W + W^\perp.$$

Dle 3.2.2. platí: $\dim W + \dim W^\perp = \dim(W \cap W^\perp) + \dim(W + W^\perp)$. Vzhledem k výše dokázanému $\dim W + \dim W^\perp = \dim(W \cap W^\perp) + \dim E$. Nechť $\vec{x} \in W \cap W^\perp$. Pak $\vec{x} \perp \vec{x}$, tedy

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 0, \text{ což dává } \vec{x} = \vec{0}. \text{ Proto } W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}, \quad \dim(W \cap W^\perp) = 0,$$

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim E.$$

4.8.6. VĚTA

Nechť E je euklidovský prostor, P je podprostor prostoru E , $\vec{v} \in E$, $\vec{v}_0$ je ortogonální průmět vektoru $\vec{v}$ do P ($\vec{v}_0 \in P$).

Platí: Pro všechna $\vec{x} \in P$ je $\|\vec{v} - \vec{v}_0\| \leq \|\vec{v} - \vec{x}\|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{v}_0$.

Důkaz: Nechť $\vec{x} \in P$. $\vec{v} - \vec{x} = (\vec{v} - \vec{v}_0) + (\vec{v}_0 - \vec{x})$. Je $\vec{v} - \vec{v}_0 \perp P$, tedy speciálně $\vec{v} - \vec{v}_0 \perp \vec{v}_0 - \vec{x}$.

Podle Pythagorovy věty (4.4.3.) platí: $\|\vec{v} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{v}_0\|^2 + \|\vec{v}_0 - \vec{x}\|^2$. Pak $\|\vec{v} - \vec{v}_0\|^2 \leq \|\vec{v} - \vec{x}\|^2$, takže $\|\vec{v} - \vec{v}_0\| \leq \|\vec{v} - \vec{x}\|$. Rovnost nastává právě tehdy, když $\|\vec{v}_0 - \vec{x}\| = 0$, což je právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{v}_0$.

Kapitola 5 - Matice (nad tělesem)

5.1. Definice matice

5.1.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$. Maticí typu (m, n) nad tělesem T rozumíme zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ do T .

5.1.2. OZNAČENÍ

Množinu všech matic typu (m, n) nad tělesem T budeme značit $T_{m,n}$.

Nechť $A \in T_{m,n}$, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$. Místo $A((i, j))$ budeme psát a_{ij} .

Dále píšeme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}).$$

5.1.3. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$. Každou matici z $T_{n,n}$ nazýváme čtvercová matice n -tého stupně.

Nechť $A \in T_{m,n}$. Matice A se nazývá nulová, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Nulovou matici budeme značit O .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (n \text{ sloupců, } m \text{ řádků})$$

5.1.4. DEFINICE

Uvažujme následující podmínky týkající se matice:

- (1) Všechny nulové řádky (tj. řádky sestávající z nul) jsou dole.
- (2) Každý nenulový řádek začíná několika nulami následovanými jedničkou. Tato 1 se nazývá vedoucí 1 daného řádku.
- (3) Pozice vedoucí jedničky v řádku s vyšším indexem je více vpravo než pozice vedoucí jedničky v řádku s nižším indexem.
- (4) Každý prvek pod vedoucí jedničkou je nula.
- (5) Každý prvek nad vedoucí jedničkou je nula.

Matice, která splňuje první čtyři podmínky, se nazývá matice v řádkovém stupňovitém tvaru.

Matice, která splňuje všech pět podmínek, se nazývá matice v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru.

5.1.5. PŘÍKLAD

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A je v řádkovém stupňovitém tvaru, není však v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru - podmínka (5) není splněna.

B je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru.

C není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (1).

D není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (2).

E není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (3).

F není v řádkovém stupňovitém tvaru – není splněna podmínka (3), ani podmínka (4).

5.1.6. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazývá diagonální, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5.1.7. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazývá jednotkovou, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, a $a_{ii} = 1$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednotkovou matici n -tého stupně budeme značit E (případně E_n , chceme-li zdůraznit její stupeň).

5.1.8. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazývá horní trojúhelníková, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5.1.9. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Matice A se nazývá symetrická, pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

5.2. Operace s maticemi

5.2.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B, C \in T_{m,n}$. Matice C je součtem matic A, B , jestliže $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Označení: $C = A + B$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

5.2.2. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in T_{m,n}$, $c \in T$. Matice B je skalárním násobkem (c -násobkem) matice A , jestliže $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Označení: $B = c \cdot A$.

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.2.3. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,p}$, $B \in T_{p,n}$, $C \in T_{m,n}$. Matice C je součinem matic A, B , jestliže $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Označení $C = A \cdot B$.

5.2.4. DEFINICE

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,m}$. Matice B je matice transponovaná k matici A , jestliže $b_{ji} = a_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Označení $B = A^T$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.2.5. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Platí:

(I) Pro všechna $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$, $C \in T_{p,q}$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

(II) Pro všechna $A, B \in T_{m,n}$, $C \in T_{n,p}$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

(III) Pro všechna $A \in T_{m,n}$, $B, C \in T_{n,p}$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

(IV) Pro všechna $\alpha, \beta \in T$, $A \in T_{m,n}$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A.$$

(V) Pro všechna $\alpha \in T$, $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B.$$

(VI) Pro všechna $A \in T_{m,n}$

$$E_m \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A.$$

(VII) Pro všechna $A \in T_{m,n}$

$$(A^T)^T = A.$$

(VIII) Pro všechna $A, B \in T_{m,n}$

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

(IX) Pro všechna $\alpha \in T$, pro všechna $A \in T_{m,n}$

$$(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$$

(X) Pro všechna $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Důkaz:

(I) Označme $U = B \cdot C$, $V = A \cdot B$, $L = A \cdot U$, $P = V \cdot C$. Je $U \in T_{n,q}$, $V \in T_{m,p}$, $L \in T_{m,q}$, $P \in T_{m,q}$. Zvolme libovolně $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, q\}$. Chceme: $l_{ij} = p_{ij}$. Počítejme:

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \left(\sum_{l=1}^p b_{kl} \cdot c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} \cdot (b_{kl} \cdot c_{lj}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (a_{ik} \cdot b_{kl}) \cdot c_{lj} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kl}) \cdot c_{lj},$$

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^p v_{il} \cdot c_{lj} = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kl} \right) \cdot c_{lj} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kl}) \cdot c_{lj} = l_{ij}.$$

(II) Označme $U = A + B$, $V = A \cdot C$, $W = B \cdot C$, $L = U \cdot C$, $P = V + W$. Je $U \in T_{m,n}$, $V \in T_{m,p}$, $W \in T_{m,p}$, $L \in T_{m,p}$, $P \in T_{m,p}$. Zvolme libovolně $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$.

Chceme: $l_{ij} = p_{ij}$.

Počítejme:

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{ik}) \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot c_{kj} + b_{ik} \cdot c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{kj} + \sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot c_{kj} = v_{ij} + w_{ij} = p_{ij}.$$

(III) Postupujeme obdobně jako v části (II).

(IV) Důkaz přenecháváme čtenáři

(V) Necht' $U = A \cdot B$, $V = \alpha \cdot A$, $L = \alpha \cdot U$, $P = V \cdot B$. Je $U \in T_{m,p}$, $V \in T_{m,n}$, $L \in T_{m,p}$, $P \in T_{m,p}$. Zvolme libovolně $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$. Chceme: $l_{ij} = p_{ij}$. Počítejme:

$$l_{ij} = \alpha \cdot u_{ij} = \alpha \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \alpha \cdot (a_{ik} \cdot b_{kj}) = \sum_{k=1}^n (\alpha \cdot a_{ik}) \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^n v_{ik} \cdot b_{kj} = p_{ij}.$$

(VI) Necht' $L = E_m \cdot A$. Je $L \in T_{m,n}$. Zvolme libovolně $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Chceme: $l_{ij} = a_{ij}$. Počítejme:

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^m e_{ik} \cdot a_{kj} = 0 \cdot a_{1j} + \dots + 0 \cdot a_{i-1,j} + 1 \cdot a_{ij} + 0 \cdot a_{i+1,j} + \dots + 0 \cdot a_{mj} = a_{ij}.$$

Druhá rovnost se dokáže obdobně.

(VII) Důkaz přenecháváme čtenáři.

(VIII) Důkaz přenecháváme čtenáři.

(IX) Důkaz přenecháváme čtenáři.

(X) Necht' $U = A \cdot B$, $V = B^T$, $W = A^T$, $L = U^T$, $P = V \cdot W$. Je $U \in T_{m,p}$, $V \in T_{p,n}$, $W \in T_{n,m}$, $L \in T_{p,m}$, $P \in T_{p,m}$. Zvolme libovolně $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Chceme:

$$l_{ij} = p_{ij}. \text{ Počítejme: } l_{ij} = u_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^n w_{kj} \cdot v_{ik} = \sum_{k=1}^n v_{ik} \cdot w_{kj} = p_{ij}.$$

5.3. Hodnost matice

5.3.1. OZNAČENÍ

Necht' T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$. Pak klademe

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$\vec{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

5.3.2. DEFINICE

Necht' T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$. Hodnost matice A značíme $h(A)$ a definujeme ji

takto $h(A) = \dim \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle$.

5.3.3. TVRZENÍ

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$. Platí: $h(A) \leq \min\{m, n\}$.

Důkaz:

(α) Poněvadž $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in T^n$, je $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$ podprostor v T^n , takže

$$h(A) = \dim \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle \leq \dim T^n = n.$$

(β) Víme, že z každé konečné množiny generátorů vektorového prostoru lze vybrat bázi (viz 3.1.3 (a)), tedy z vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ lze vybrat bázi podprostoru $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$, což znamená, že $h(A) = \dim \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle \leq m$.

Z (α) a (β) plyne $h(A) \leq \min\{m, n\}$.

5.3.4. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A, A' \in T_{m,n}$. Nechť matice A' vznikla z matice A užitím konečného počtu následujících úprav:

- 1) nahrazením řádku tímto řádkem plus jiný řádek vynásobený nějakým prvkem tělesa T
- 2) výměnou dvou řádků
- 3) vynásobením řádku nějakým nenulovým prvkem tělesa T .

Pak $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{a}_1', \vec{a}_2', \dots, \vec{a}_m' \rangle$. Speciálně, $h(A) = h(A')$.

Důkaz:

(I) Nechť $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, $c \in T$, $\vec{a}_i' = \vec{a}_i + c \cdot \vec{a}_j$, $\vec{a}_k' = \vec{a}_k$ pro $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i$.

Ukážeme, že $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{a}_1', \vec{a}_2', \dots, \vec{a}_m' \rangle$.

$\subseteq$: Pro $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i$, je $\vec{a}_k' = \vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m' \rangle$. Dále,

$\vec{a}_i = \vec{a}_i' + (-c) \cdot \vec{a}_j = \vec{a}_i' + (-c) \cdot \vec{a}_j' \in \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m' \rangle$. Tudíž $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \subseteq \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m' \rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze.

$\supseteq$: Pro $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i$, je $\vec{a}_k' = \vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$. Dále

$\vec{a}_i' = \vec{a}_i + c \cdot \vec{a}_j \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$. Tudíž $\{\vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m'\} \subseteq \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze.

(II) Nechť $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, $\vec{a}_i' = \vec{a}_j$, $\vec{a}_j' = \vec{a}_i$, $\vec{a}_k' = \vec{a}_k$ pro $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i, k \neq j$.

$$\begin{aligned} \text{Pak } \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_m \rangle \\ = \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_{i-1}', \vec{a}_j', \vec{a}_{i+1}', \dots, \vec{a}_{j-1}', \vec{a}_i', \vec{a}_{j+1}', \dots, \vec{a}_m' \rangle \\ = \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_{i-1}', \vec{a}_i', \vec{a}_{i+1}', \dots, \vec{a}_{j-1}', \vec{a}_j', \vec{a}_{j+1}', \dots, \vec{a}_m' \rangle \end{aligned}$$

(III) Nechť $i \in \{1, \dots, m\}$, $c \in T$, $c \neq 0$, $\vec{a}_i' = c \cdot \vec{a}_i$, $\vec{a}_k' = \vec{a}_k$ pro $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i$.

Ukážeme, že $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m' \rangle$.

$\subseteq$: Pro $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i$, je $\vec{a}_k' = \vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m' \rangle$.

Dále, $\vec{a}_i = \frac{1}{c} \cdot \vec{a}_i' \in \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m' \rangle$. Tudíž $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \subseteq \langle \vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m' \rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze.

$\supseteq$: Pro $k \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq i$, je $\vec{a}_k' = \vec{a}_k \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$. Dále $\vec{a}_i' = c \cdot \vec{a}_i \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$.

Tudíž $\{\vec{a}_1', \dots, \vec{a}_m'\} \subseteq \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$, odkud již snadno plyne požadovaná inkluze

Tvrzení věty nyní vyplývají z (I), (II) a (III).

5.3.5. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$. Platí: $h(A^T) = h(A)$.

Důkaz: Pokud $A = O$, je $h(A) = 0$, $h(A^T) = 0$ a tvrzení platí.

Nechť $A \neq O$. Stačí ukázat: $h(A^T) \leq h(A)$. Pak totiž $h(A) = h((A^T)^T) \leq h(A^T)$, takže

$$h(A^T) = h(A). \text{ Nechť } h(A) = k, h(A^T) = l. \text{ Je } k \in \{1, \dots, m\}, l \in \{1, \dots, n\}.$$

Označme $\vec{b}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $\vec{b}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$, $\dots$, $\vec{b}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$.

Existují $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ tak, že $\{\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}\}$ je báze prostoru $\langle \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \rangle$. Existují $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $\{\vec{b}_{j_1}, \dots, \vec{b}_{j_l}\}$ je báze prostoru $\langle \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \rangle$.

Označme $\vec{u}_1 = (a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_1}, \dots, a_{i_k j_1})$, $\vec{u}_2 = (a_{i_1 j_2}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_k j_2})$, $\dots$, $\vec{u}_l = (a_{i_1 j_l}, a_{i_2 j_l}, \dots, a_{i_k j_l})$. Ukážeme, že vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l$ jsou lineárně nezávislé.

Nechť $c_1, \dots, c_l \in T$, $c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_l \cdot \vec{u}_l = \vec{0}$. Chceme: $c_1 = c_2 = \dots = c_l = 0$.

Ukážeme: $c_1 \cdot \vec{b}_{j_1} + c_2 \cdot \vec{b}_{j_2} + \dots + c_l \cdot \vec{b}_{j_l} = \vec{0}$. K tomu stačí ukázat, že $c_1 \cdot a_{i_1 j_1} + c_2 \cdot a_{i_1 j_2} + \dots + c_l \cdot a_{i_1 j_l} = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\} - \{i_1, \dots, i_k\}$. Bud' $i \in \{1, \dots, m\} - \{i_1, \dots, i_k\}$. $\{\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}\}$ je báze prostoru $\langle \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \rangle$, a proto existují $d_1, \dots, d_k \in T$ tak, že $\vec{a}_i = d_1 \cdot \vec{a}_{i_1} + d_2 \cdot \vec{a}_{i_2} + \dots + d_k \cdot \vec{a}_{i_k}$.

Pak $a_{ij_1} = \sum_{p=1}^k d_p \cdot a_{i_p j_1}$, $a_{ij_2} = \sum_{p=1}^k d_p \cdot a_{i_p j_2}$, $\dots$, $a_{ij_l} = \sum_{p=1}^k d_p \cdot a_{i_p j_l}$. Potom

$$\begin{aligned} c_1 \cdot a_{i j_1} + c_2 \cdot a_{i j_2} + \dots + c_l \cdot a_{i j_l} &= c_1 \sum_{p=1}^k d_p \cdot a_{i_p j_1} + c_2 \sum_{p=1}^k d_p \cdot a_{i_p j_2} + \dots + c_l \sum_{p=1}^k d_p \cdot a_{i_p j_l} = \\ &= d_1 \cdot (c_1 a_{i_1 j_1} + c_2 a_{i_1 j_2} + \dots + c_l a_{i_1 j_l}) + d_2 \cdot (c_1 a_{i_2 j_1} + c_2 a_{i_2 j_2} + \dots + c_l a_{i_2 j_l}) + \dots + \\ &+ d_k \cdot (c_1 a_{i_k j_1} + c_2 a_{i_k j_2} + \dots + c_l a_{i_k j_l}) = d_1 \cdot 0 + d_2 \cdot 0 + \dots + d_k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Protože vektory $\vec{b}_{j_1}, \dots, \vec{b}_{j_l}$ jsou lineárně nezávislé, jsou $c_1 = c_2 = \dots = c_l = 0$.

Takže: $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l$ jsou lineárně nezávislé vektorů v prostoru T^K . Z toho plyne, že $l \leq k$.

5.3.6. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$, $B \in T_{n,p}$. Platí: $h(A \cdot B) \leq \min\{h(A), h(B)\}$.

Důkaz: Označme $C = A \cdot B$. Nechť $i \in \{1, \dots, m\}$. S ohledem na definici násobení matic platí: $\vec{c}_i = a_{i1} \cdot \vec{b}_1 + a_{i2} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{in} \cdot \vec{b}_n$, tedy $\vec{c}_i \in \langle \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \rangle$. Proto $\langle \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\} \rangle \subseteq \langle \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \rangle$, tedy $h(C) = h(A \cdot B) \leq h(B)$.

Použitím již dokázaného na součin $B^T \cdot A^T$ dostáváme $h(B^T \cdot A^T) \leq h(A^T)$, což podle 5.3.5 znamená $h(A \cdot B) \leq h(A)$ (uvědomme si, že $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$).

Celkem $h(A \cdot B) \leq \min\{h(A), h(B)\}$.

5.4. Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus

5.4.1. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,n}$. Nechť matice A je v řádkovém stupňovitém tvaru.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$, $\vec{a}_i \neq \vec{0}$ pro $i \leq k$, $\vec{a}_i = \vec{0}$ pro $i > k$. Platí:

(I) $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$ je báze prostoru $\langle \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_m\} \rangle$.

(II) $\dim \langle \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \rangle = k$.

Důkaz:

(I) Jelikož $\vec{a}_i = \vec{0}$ pro $i > k$, je $\langle \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\} \rangle = \langle \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \rangle$. Stačí tedy ukázat, že vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ jsou lineárně nezávislé. Nechť $c_1, \dots, c_k \in T$, $c_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$.

Chceme: $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

Označme pozice vedoucích jedniček: $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (k, j_k)$. Je $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Platí: $c_1 \cdot a_{1j_1} + c_2 \cdot a_{2j_1} + \dots + c_k \cdot a_{kj_1} = 0$, dále $c_2 \cdot a_{2j_2} + c_3 \cdot a_{3j_2} + \dots + c_k \cdot a_{kj_2} = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 \cdot 1 & + c_2 \cdot 0 & + \dots + c_k \cdot 0 & = 0 & c_2 \cdot 1 & + c_3 \cdot 0 & + \dots + c_k \cdot 0 & = 0 \\ c_1 & & & = 0 & c_2 & & & = 0. \end{array}$$

Obdobně také $c_3 = c_4 = \dots = c_k = 0$.

(II) Tvrzení (II) ihned plyne z (I).

5.4.2. GAUSSŮV-JORDANŮV ELIMINAČNÍ ALGORITMUS

VSTUP: Matice A typu (m, n) nad tělesem T .

VÝSTUP: Matice $\bar{A}$ typu (m, n) nad tělesem T s těmito vlastnostmi:

(I) $\bar{A}$ je v řádkovém stupňovitém tvaru.

(II) $\langle \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \rangle = \langle \{\vec{\bar{a}}_1, \dots, \vec{\bar{a}}_m\} \rangle$.

NEBO

Matice $\bar{A}$ typu (m, n) nad tělesem T s těmito vlastnostmi:

(I') $\bar{A}$ je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru.

(II') $\langle \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \rangle = \langle \{\vec{\bar{a}}_1, \dots, \vec{\bar{a}}_m\} \rangle$.

VÝPOČET:

1. Najděte nejlevější sloupec, jenž neobsahuje samé nuly.
2. Je-li to nutné vyměňte první řádek s řádkem, jenž obsahuje nenulový prvek a ve sloupci nalezeném v kroku 1.
3. Jestliže prvek a není 1, vynásobte první řádek prvkem $\frac{1}{a}$, abyste získali vedoucí jedničku prvního řádku.
4. Použijte první řádek k získání nul pod vedoucí jedničkou prvního řádku (použitím úpravy (1) z věty 5.3.4.).
5. Zakryjte první řádek a aplikujte první 4 kroky na zbývající podmatici. Pokračujte tak dlouho, až celá matice je v řádkovém stupňovitém tvaru. To bude matice $\bar{A}$.
6. Použijte poslední nenulový řádek k získání nul nad vedoucí jedničkou tohoto řádku. Použijte předposlední nenulový řádek k získání nul nad vedoucí jedničkou tohoto řádku. Pokračujte tak dlouho, až matice je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru. To bude matice $\bar{\bar{A}}$.

(Je-li $A=O$, výpočet neproběhne a $A=\bar{A}=\bar{\bar{A}}=O$.)

Důkaz korektnosti algoritmu: Fakta (I) a (I') jsou zřejmá po krátké úvaze. Fakta (II) a (II') zdůvodníme takto:

Jednotlivé kroky algoritmu upravují výchozí matici A :

Krok 1: K úpravě nedochází.

Krok 2: K úpravě nedochází nebo je použita úprava (2) z věty 5.3.4.

Krok 3: K úpravě nedochází nebo je použita úprava (3) z věty 5.3.4.

Krok 4: Je použita konečně mnohokrát úprava (1) z věty 5.3.4.

Krok 5: Konečně mnohokrát se opakují kroky 1 až 4, je tedy použito konečně mnoho úprav (1), (2), (3) z věty 5.3.4.

Krok 6: Je použita konečně mnohokrát úprava (1) z věty 5.3.4.

Shrnutí: Při výpočtu matic $\bar{A}$ a $\bar{\bar{A}}$ se výchozí matice A upravuje pomocí konečně mnoha úprav (1), (2), (3) z věty 5.3.4. Rovnosti (II) a (II') nyní plynou bezprostředně z věty 5.3.4.

5.4.3. PŘÍKLAD

Necht' $A \in R_{4,5}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Vypočtěte matice $\bar{A}$ a $\bar{\bar{A}}$.

Řešení: Použijeme Gaussův – Jordanův eliminační algoritmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{krok 4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{krok 3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{krok 4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{krok 6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4.4. POZNÁMKA

Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus lze použít při řešení této standardní úlohy:

Je dáno těleso T , přirozená čísla m, n a vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in T^n$. Má se určit dimenze a (nějaká) báze prostoru $V = \langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\} \rangle$. Postupujme následovně:

Nechť

$$\vec{v}_1 = (v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1)$$

$$\vec{v}_2 = (v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2)$$

$\vdots$

$$\vec{v}_m = (v_1^m, v_2^m, \dots, v_n^m).$$

Sestrojíme matici $A \in T_{m,n}$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = v_j^i$. Vypočteme matici $\bar{A}$.

Víme: $V = \langle \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\} \rangle = \langle \{\vec{\bar{a}}_1, \vec{\bar{a}}_2, \dots, \vec{\bar{a}}_m\} \rangle$, $\bar{A}$ je v řádkovém stupňovitém tvaru.

Dle 5.4.1. pak $\dim V = k$ a $\{\vec{\bar{a}}_1, \vec{\bar{a}}_2, \dots, \vec{\bar{a}}_k\}$ je báze prostoru V , přičemž číslo k je počet nenulových řádků matice $\bar{A}$ (tj. $\vec{\bar{a}}_i \neq \vec{0}$ pro $i \leq k$, $\vec{\bar{a}}_i = \vec{0}$ pro $i > k$). Obdobně lze použít matici $\bar{\bar{A}}$.

Konkrétně, nechť v prostoru R^5 jsou dány vektory $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (6, 7, 8, 9, 10)$, $\vec{v}_3 = (11, 12, 13, 14, 15)$, $\vec{v}_4 = (16, 17, 18, 19, 20)$. Nechť $V = \langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \rangle$. Má se určit $\dim V$ a nějaká báze prostoru V . Sestrojíme tedy matici A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{V 5.4.3. jsme spočítali, že } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy tuto odpověď: $\dim V = 2$, $\{(1, 2, 3, 4, 5), (0, 1, 2, 3, 4)\}$ je báze V , $\{(1, 0, -1, -2, -3), (0, 1, 2, 3, 4)\}$ je báze V .

5.5. Matice regulární a singulární

5.5.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$.

Matice A se nazývá regulární, když $h(A) = n$.

Matice A se nazývá singulární, není-li regulární.

5.5.2. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,m}$, $B \in T_{m,n}$. Jestliže A je regulární, pak maticová rovnice $A \cdot X = B$ má právě jedno řešení mezi maticemi typu (m, n) nad tělesem T .

Důkaz: Použijeme toto označení:

$$\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \vec{v}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, \vec{v}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{mm})$$

Uvědomme si tato tři fakta:

$$(I) \dim \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle = h(A^T)$$

(dle definice transponované matice a dle definice hodnosti matice)

$$(II) h(A^T) = h(A) \text{ (dle 5.3.5.)}$$

$$(III) h(A) = m \text{ (matice } A \text{ je regulární)}$$

Shrneme-li, dostaneme $\dim \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle = m$. Zřejmě $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle \subseteq T^m$,

$\dim T^m = m$. Tudíž $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle = T^m$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ je báze prostoru T^m .

Porovnejme j -tý sloupec matice $A \cdot X$ a j -tý sloupec matice B ($j \in \{1, \dots, n\}$).

$$a_{11} \cdot x_{1j} + a_{12} \cdot x_{2j} + \dots + a_{1m} \cdot x_{mj} = b_{1j}$$

$$\text{Dostaneme } a_{21} \cdot x_{1j} + a_{22} \cdot x_{2j} + \dots + a_{2m} \cdot x_{mj} = b_{2j}$$

$\vdots$

$$a_{m1} \cdot x_{1j} + a_{m2} \cdot x_{2j} + \dots + a_{mm} \cdot x_{mj} = b_{mj}$$

neboli vektorově $x_{1j} \cdot \vec{v}_1 + x_{2j} \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_{mj} \cdot \vec{v}_m = \vec{w}_j$, kde $\vec{w}_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj})$.

Řešit rovnici $A \cdot X = B$ tedy znamená řešit soustavu

$$x_{1j} \cdot \vec{v}_1 + x_{2j} \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_{mj} \cdot \vec{v}_m = \vec{w}_j, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (*)$$

(dány jsou $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$, neznámé jsou x_{ij} pro $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$).

Vzhledem k tomu, že $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ je báze prostoru T^m , soustava $(*)$ má právě jedno řešení.

5.5.3. POZNÁMKA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{m,m}$, $B \in T_{m,n}$, A je regulární. Má se vyřešit rovnice $A \cdot X = B$. Matici X lze určit pomocí Gaussova-Jordanova eliminačního algoritmu. Tento algoritmus, aplikovaný na matici A , postupně pomocí úprav $U_1, U_2, \dots, U_k$ (jde o úpravy (1), (2), (3) z věty 5.3.4.) vypočte matici $\bar{A}$. Uvědomme si, že matice $\bar{A}$ má všechny řádky nenulové, takže každý její řádek má svou vedoucí jedničku. Protože $\bar{A}$ je v redukovaném řádkovém stupňovitém tvaru, je $\bar{A} = E$. Aplikujeme postupně úpravy $U_1, U_2, \dots, U_k$ na matici B . Výslednou matici označme C .

$$B \xrightarrow{U_1} \dots \xrightarrow{U_k} C$$

Tvrdíme, že matice C je jediné řešení rovnice $A \cdot X = B$. Nechť tedy $A \cdot X = B$. Je třeba ukázat, že $X = C$. Zvolme libovolně $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Matice $A \cdot X$ má tento j -tý sloupec:

$$a_{11} \cdot x_{1j} + a_{12} \cdot x_{2j} + \dots + a_{1m} \cdot x_{mj}$$

$$a_{21} \cdot x_{1j} + a_{22} \cdot x_{2j} + \dots + a_{2m} \cdot x_{mj}$$

$\vdots$

$$a_{m1} \cdot x_{1j} + a_{m2} \cdot x_{2j} + \dots + a_{mm} \cdot x_{mj}$$

Tento sloupec bude postupnou aplikací úprav $U_1, U_2, \dots, U_k$ na matici $A \cdot X$ převeden na tvar

$$\begin{array}{ccc} \bar{a}_{11} \cdot x_{1j} + \bar{a}_{12} \cdot x_{2j} + \dots + \bar{a}_{1m} \cdot x_{mj} & 1 \cdot x_{1j} + 0 \cdot x_{2j} + \dots + 0 \cdot x_{mj} & x_{1j} \\ \bar{a}_{21} \cdot x_{1j} + \bar{a}_{22} \cdot x_{2j} + \dots + \bar{a}_{2m} \cdot x_{mj} & 0 \cdot x_{1j} + 1 \cdot x_{2j} + \dots + 0 \cdot x_{mj} & x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} \cdot x_{1j} + \bar{a}_{m2} \cdot x_{2j} + \dots + \bar{a}_{mm} \cdot x_{mj} & 0 \cdot x_{1j} + 0 \cdot x_{2j} + \dots + 1 \cdot x_{mj} & x_{mj} \end{array}, \text{ čili } \begin{array}{ccc} & & x_{1j} \\ & & x_{2j} \\ & & \vdots \\ & & x_{mj} \end{array}.$$

Uvažme nyní, že $A \cdot X = B$. Tudíž

$$\begin{aligned}x_{1j} &= c_{1j} \\x_{2j} &= c_{2j} \\&\vdots \\x_{mj} &= c_{mj}\end{aligned}$$

$$X = C.$$

5.5.4. PŘÍKLAD.

Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ jsou matice nad tělesem $\mathbb{R}$

Vyřešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$.

Řešení: Použijeme postup popsany v poznámce 5.5.3.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -100 & 2 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -3 & 10 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 102 & 0 & 105 & 206 & 307 & 408 \\ 0 & 0 & 10 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ 0 & 0 & 10 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{10} & \frac{16}{10} & \frac{20}{10} & \frac{24}{10} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{102} & \frac{-2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{10} & \frac{16}{10} & \frac{20}{10} & \frac{24}{10} \end{array} \right).$$

$$\text{Tedy } X = \begin{pmatrix} \frac{-3}{102} & \frac{-2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{105}{102} & \frac{206}{102} & \frac{307}{102} & \frac{408}{102} \\ \frac{12}{10} & \frac{16}{10} & \frac{20}{10} & \frac{24}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{34} & \frac{-1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{35}{34} & \frac{103}{51} & \frac{307}{102} & 4 \\ \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & 2 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}.$$

Zkouška:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{34} & \frac{-1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{35}{34} & \frac{103}{51} & \frac{307}{102} & 4 \\ \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & 2 & \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = B.$$

Pomocné výpočty:

$$\frac{-1}{34} + \frac{35}{34} = \frac{34}{34} = 1,$$

$$\frac{-1}{51} + \frac{103}{51} = \frac{102}{51} = 2,$$

$$\frac{-1}{102} + \frac{307}{102} = \frac{306}{102} = 3,$$

$$0 + 4 = 4,$$

$$\frac{100}{34} + \frac{70}{34} = \frac{170}{34} = 5,$$

$$\frac{100}{51} + \frac{206}{51} = \frac{306}{51} = 6,$$

$$\frac{100}{102} + \frac{614}{102} = \frac{714}{102} = 7$$

$$0 + 8 = 8$$

$$\frac{3}{34} - \frac{105}{34} + \frac{60}{5} = \frac{-102}{34} + 12 = -3 + 12 = 9$$

$$\frac{3}{51} - \frac{309}{51} + \frac{80}{5} = \frac{-306}{51} + 16 = -6 + 16 = 10$$

$$\frac{3}{102} - \frac{921}{102} + 20 = \frac{-918}{102} + 20 = -9 + 20 = 11$$

$$0 - 12 + \frac{120}{5} = -12 + 24 = 12$$

5.6. Matice inverzní

5.6.1. LEMMA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí: existuje nejvýše jedna matice $X \in T_{n,n}$ tak, že $A \cdot X = X \cdot A = E$.

Důkaz: Nechť $X, Y \in T_{n,n}$, $A \cdot X = X \cdot A = E$, $A \cdot Y = Y \cdot A = E$.

Chceme: $X = Y$. Počítejme: $X = X \cdot E = X \cdot (A \cdot Y) = (X \cdot A) \cdot Y = E \cdot Y = Y$.

5.6.2. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A, X \in T_{n,n}$.

Matice X se nazývá matice inverzní k matici A , platí-li:

$$A \cdot X = X \cdot A = E.$$

Označení: $X = A^{-1}$.

5.6.3. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A, X \in T_{n,n}$. Jestliže $A \cdot X = E$, pak $X \cdot A = E$ a tedy $X = A^{-1}$.

Důkaz: $n = h(E) = h(A \cdot X) \leq \min\{h(A), h(X)\} \leq h(X) \leq n$. (Použili jsme větu 5.3.6.) Odtud $h(X) = n$, X je regulární matice. Dle 5.5.2. existuje právě jedna matice $Y \in T_{n,n}$ splňující $X \cdot Y = E$.

Potom $A \cdot X = E \quad / \cdot Y$

$$(A \cdot X) \cdot Y = E \cdot Y$$

$$A \cdot (X \cdot Y) = Y$$

$$A \cdot E = Y$$

$$A = Y$$

Takže $E = X \cdot Y = X \cdot A$.

5.6.4. VĚTA

Nechť T je těleso $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí:

Matice A^{-1} existuje právě tehdy, když matice A je regulární.

Důkaz:

(I) Nechť A^{-1} existuje. Chceme: A je regulární, tj. $h(A) = n$.

$$n = h(E) = h(A \cdot A^{-1}) \leq \min\{h(A), h(A^{-1})\} \leq h(A) \leq n \text{ (použili jsme větu 5.3.6.)}$$

Odtud $h(A) = n$.

(II) Nechť A je regulární. Chceme: A^{-1} existuje.

Dle 5.5.2. existuje právě jedna matice $X \in T_{n,n}$ tak, že $A \cdot X = E$. Dle 5.6.3. pak $X = A^{-1}$.

5.6.5. POZNÁMKA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$, A je regulární. Má se určit matice A^{-1} . S ohledem na 5.6.3. to znamená vyřešit maticovou rovnici $A \cdot X = E$ ($X \in T_{n,n}$). K tomu lze použít Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus, jak je vyloženo v poznámce 5.5.3.

5.6.6. PŘÍKLAD

Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ je matice nad tělesem $\mathbb{R}$. Určete matici A^{-1} .

Řešení: Použijeme postup popsany v poznámce 5.6.5.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 102 & 0 & 100 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{array} \right). \text{ Tedy } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{102} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{100}{102} & \frac{1}{102} & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{50}{51} & \frac{1}{102} & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Zkouška:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -100 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{51} & \frac{-1}{102} & 0 \\ \frac{50}{51} & \frac{1}{102} & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Pomocné výpočty:

$$\frac{1}{51} + \frac{50}{51} = \frac{51}{51} = 1$$

$$\frac{-1}{102} + \frac{1}{102} = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

$$\frac{-100}{51} + \frac{100}{51} = 0$$

$$\frac{100}{102} + \frac{2}{102} = \frac{102}{102} = 1$$

$$0 + 0 = 0$$

$$\frac{-3}{51} - \frac{150}{51} + \frac{30}{10} = \frac{-30 - 1500 + 1530}{510} = 0$$

$$\frac{3}{102} - \frac{3}{102} + 0 = 0$$

$$10 \cdot \frac{1}{10} = 1$$

5.6.7. VĚTA

Necht' T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in T_{n,n}$, A, B jsou regulární. Pak

- (a) A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (b) A^T je regulární a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- (c) $A \cdot B$ je regulární a $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Důkaz:

- (a) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, takže $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (b) $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E$, $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E^T = E$, takže $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- (c) $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$,
 $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E$, takže $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Kapitola 6 – Symetrické grupy

6.1. Symetrická grupa množiny

6.1.1. DEFINICE

Nechť M je množina. Permutací množiny M rozumíme každou bijekci množiny M na množinu M . Množinu všech permutací množiny M budeme značit $S(M)$.

Tedy $S(M) = \{\pi : M \rightarrow M \mid \pi \text{ je permutace}\}$.

6.1.2. VĚTA

Množina $S(M)$ s operací skládání zobrazení je grupa.

Důkaz: Necht' $\pi, \rho \in S(M)$. Protože složení bijekcí je bijekce (viz 1.1.8.(c)), je $\pi \rho \in S(M)$.

Necht' $\pi, \rho, \sigma \in S(M)$. Pak $(\pi \rho) \sigma = \pi (\rho \sigma)$ na základě 1.1.3.(a). Zřejmě $id_M \in S(M)$ a id_M je neutrální prvek vzhledem k operaci skládání zobrazení. Konečně, necht' $\pi \in S(M)$.

Pak π^{-1} je bijekce (viz 1.1.8.(d)), $\pi^{-1} \in S(M)$ a π^{-1} je inverzní prvek k prvku π .

6.1.3. DEFINICE

Grupa $S(M)$ se nazývá symetrická grupa množiny M .

Necht' $n \in \mathbb{N}$. Místo $S(\{1, 2, \dots, n\})$ píšeme S_n a hovoříme o symetrické grupě n prvků.

6.1.4. VĚTA

Necht' M je množina. Platí:

Grupa $S(M)$ je komutativní právě tehdy, když množina M má nejvýše 2 prvky.

speciálně: S_1, S_2 jsou komutativní, $S_3, S_4, S_5, S_6, \dots$ jsou nekomutativní.

Důkaz:

$\Rightarrow$: Předpokládejme, že M má aspoň tři prvky a, b, c . Definujme $\pi : M \rightarrow M$ a $\rho : M \rightarrow M$ takto:

$$\begin{array}{ll} \pi(a)=a & \rho(a)=b \\ \pi(b)=c & \rho(b)=a \\ \pi(c)=b & \rho(c)=c \\ \pi(x)=x & \rho(x)=x \quad \text{pro } x \in M - \{a, b, c\}. \end{array}$$

Zřejmě $\pi, \rho \in S(M)$. Dále $(\pi \rho)(a) = \rho(\pi(a)) = \rho(a) = b$, $(\rho \pi)(a) = \pi(\rho(a)) = \pi(b) = c$.

Vídíme, že $\pi \rho \neq \rho \pi$. Takže grupa $S(M)$ není komutativní.

$\Leftarrow$: Jestliže $M = \emptyset$, pak $S(M) = \{\emptyset\}$. Jestliže M je jednoprvková, pak $S(M)$ je jednoprvková. Jestliže M je dvouprvková, pak $S(M)$ je dvouprvková. Stačí si uvědomit, že každá jednoprvková a dvouprvková grupa je komutativní.

6.1.5. VĚTA

Necht' $n \in \mathbb{N}$. Grupa S_n je konečná a má $n!$ prvků.

Důkaz: přenecháváme čtenáři.

6.1.6. OZNAČENÍ

Necht' $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in S_n$. Někdy budeme psát $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$.

6.1.7. DEFINICE

Necht' $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Definujeme permutaci $(i \leftrightarrow j) \in S_n$ takto:

$$\begin{array}{l} (i \leftrightarrow j)(i) = j \\ (i \leftrightarrow j)(j) = i \\ (i \leftrightarrow j)(k) = k \quad \text{pro každé } k \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i, j\} \end{array}$$

Permutace $(i \leftrightarrow j)$ se nazývá transpozice prvků i a j .

6.1.8. VĚTA

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\pi \in S_n$. Platí:

existují transpozice $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \in S_n$ ($k \in \mathbb{N}$) tak, že $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$.

Důkaz: Indukcí vzhledem k n :

(I) $n=2$

$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \leftrightarrow 2)(1 \leftrightarrow 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \leftrightarrow 2)$$

(II) $n \geq 3$

Rozlišíme 2 případy:

(1) $\pi(n) = n$

Definujeme $\rho \in S_{n-1}$:

$\rho(1) = \pi(1)$, $\rho(2) = \pi(2)$, ..., $\rho(n-1) = \pi(n-1)$. Podle indukčního předpokladu existují transpozice $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_{n-1}$ ($k \in \mathbb{N}$) tak, že $\rho = \sigma_1 \cdots \sigma_k$.

Definujeme $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ takto:

$\tau_i(1) = \sigma_i(1)$, ..., $\tau_i(n-1) = \sigma_i(n-1)$, $\tau_i(n) = n$ pro $i = 1, \dots, k$.

Zřejmě $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ jsou transpozice a $\pi = \tau_1 \cdots \tau_k$.

(2) $\pi(n) = i < n$

Položme $\pi' = \pi \cdot (i \leftrightarrow n)$. Pak $\pi'(n) = n$, takže podle již diskutovaného případu (I) existují transpozice $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$, ($k \in \mathbb{N}$) tak, že $\pi' = \tau_1 \cdots \tau_k$. Pak

$\pi = \pi(i \leftrightarrow n)(i \leftrightarrow n) = \pi'(i \leftrightarrow n) = \tau_1 \cdots \tau_k(i \leftrightarrow n)$.

6.2. Sudé a liché permutace

6.2.1. DEFINICE

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in S_n$, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$:

Dvojice (i, j) se nazývá inverze v permutaci π , platí-li:

(I) $i < j$

(II) $\pi(i) > \pi(j)$

π se nazývá sudá permutace, je-li počet všech inverzí v permutaci π sudý.

π se nazývá lichá permutace, je-li počet všech inverzí v permutaci π lichý.

Dále definujeme

$$Sg(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } \pi \text{ sudá} \\ -1 & \text{je-li } \pi \text{ lichá} \end{cases}$$

6.2.2. TVRZENÍ

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in S_n$, τ je transpozice. Platí: $Sg(\tau) = -1$.

Důkaz: $\tau = (i \leftrightarrow j)$ pro jistá $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Lze předpokládat, že $i < j$.

$$\tau = (i \leftrightarrow j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Inverze v permutaci τ :

$(i, i+1), (i, i+2), \dots, (i, i+(j-i-1))$
 $(i+1, j), (i+2, j), \dots, (i+(j-i-1), j)$
 (i, j)

Celkový počet inverzí v permutaci τ je $2 \cdot (j-i-1) + 1$. Číslo $2 \cdot (j-i-1) + 1$ je liché, takže $Sg(\tau) = -1$.

6.2.3. VĚTA

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\pi, \tau \in S_n$, τ je transpozice. Platí $Sg(\tau\pi) = -Sg(\pi)$.

Důkaz: $\tau = (i \leftrightarrow j)$ pro jistá $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Lze předpokládat, že $i < j$. Postupujeme indukcí vzhledem k $j-i$:

(α) $j-i=1$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & j & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(i) & \pi(j) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$$(i \leftrightarrow j)\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & j & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(j) & \pi(i) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že v permutaci $(i \leftrightarrow j)\pi$ je o jednu inverzi více, než v permutaci π (když (i, j) není inverze v π), nebo o jednu inverzi méně než v permutaci π (když (i, j) je inverze v π). Každopádně platí, že $Sg(\tau\pi) = -Sg(\pi)$.

(β) $j-i \geq 2$

$\tau\pi = (i \leftrightarrow j)\pi = (i \leftrightarrow j-1)(j-1 \leftrightarrow j)(i \leftrightarrow j-1)\pi$. Podle indukčního předpokladu

$$\begin{aligned} Sg(\tau\pi) &= Sg((i \leftrightarrow j-1)(j-1 \leftrightarrow j)(i \leftrightarrow j-1)\pi) \\ &= -Sg((j-1 \leftrightarrow j)(i \leftrightarrow j-1)\pi) \\ &= Sg((i \leftrightarrow j-1)\pi) \\ &= -Sg(\pi). \end{aligned}$$

6.2.4. VĚTA

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\pi, \rho \in S_n$. Platí: $Sg(\pi\rho) = Sg(\pi) \cdot Sg(\rho)$.

Důkaz: Pokud $n=1$, je tvrzení zřejmé, neboť $\pi = \rho = id$.

Nechť $n \geq 2$. Podle 6.1.8. existují transpozice $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$, $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\pi = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$.

Aplikací věty 6.2.3. snadno dostaneme

$$Sg(\pi\rho) = Sg(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \rho) = -Sg(\tau_2 \dots \tau_k \rho) = \dots = (-1)^k \cdot Sg(\rho).$$

Ovšem $Sg(\pi) = Sg(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k id) = -Sg(\tau_2 \dots \tau_k id) = \dots = (-1)^k \cdot Sg(id) = (-1)^k \cdot 1 = (-1)^k$, takže $Sg(\pi\rho) = Sg(\pi) \cdot Sg(\rho)$.

6.3. Alternující grupa

6.3.1. OZNAČENÍ

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Klademe $A_n = \{\tau \in S_n \mid Sg(\tau) = 1\}$.

6.3.2. TVRZENÍ

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Platí: A_n je podgrupa grupy S_n .

Důkaz:

(a) Chceme: $id \in A_n$. To však platí, neboť $Sg(id) = 1$.

(b) Nechť $\pi, \rho \in A_n$. Chceme: $\pi\rho \in A_n$. Tedy chceme: $Sg(\pi\rho) = 1$. Podle 6.2.4. máme $Sg(\pi\rho) = Sg(\pi) \cdot Sg(\rho) = 1 \cdot 1 = 1$.

(c) Nechť $\pi \in A_n$. Chceme: $\pi^{-1} \in A_n$. Tedy chceme: $Sg(\pi^{-1}) = 1$. Víme, že $\pi\pi^{-1} = id$, tedy $Sg(\pi) \cdot Sg(\pi^{-1}) = Sg(id) = 1$, což dává $Sg(\pi^{-1}) = 1$, protože $Sg(\pi) = 1$.

Grupa A_n se nazývá alternující grupa n prvků.

6.3.3. TVRZENÍ

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Platí: $card(A_n) = \frac{1}{2} card(S_n)$ (tedy $card(A_n) = \frac{n!}{2}$).

Důkaz: Označme $L_n = \{\pi \in S_n \mid Sg(\pi) = -1\}$. Je $S_n = A_n \cup L_n$, $A_n \cap L_n = \emptyset$, takže $card S_n = card(A_n) + card(L_n)$. Stačí tedy sestavit bijekci $\varphi: A_n \rightarrow L_n$. Pro $\pi \in A_n$

definujeme $\varphi(\pi) = (1 \leftrightarrow 2) \cdot \pi$. Podle 6.2.4. a 6.2.2. je

$$Sg(\varphi(\pi)) = Sg((1 \leftrightarrow 2)\pi) = Sg((1 \leftrightarrow 2)) \cdot Sg(\pi) = -1 \cdot 1 = -1.$$

Vidíme, že $\varphi(\pi) \in L_n$. Tudíž φ je korektně definované zobrazení množiny A_n do množiny L_n . Zbývá ukázat, že φ je bijekce. Zdůvodnění přenecháváme čtenáři.

Kapitola 7 – Determinanty

7.1. Definice determinantu

7.1.1. DEFINICE

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Determinantem matice A rozumíme následující prvek z tělesa T : $\sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$.

Označení:

$\det A$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7.1.2. PŘÍKLAD

(a) Křížové pravidlo: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Zdůvodnění: $S_2 = \{\pi, \rho\}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} + Sg(\rho) \cdot a_{1\rho(1)} \cdot a_{2\rho(2)} \\ &= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12} \cdot a_{21} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

(b) Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Zdůvodnění:

$\pi :$	$Sg(\pi) :$	$a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot a_{3\pi(3)} :$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	-1	$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1	$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	-1	$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

7.2. Základní vlastnosti determinantů

7.2.1. VĚTA (Základní vlastnosti determinantů)

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí:

(I) Jestliže matice A má některý řádek složený ze samých nul, pak $|A|=0$.

(II) Necht' $c \in T$. Jestliže matice A' vznikla z A vynásobením jednoho řádku prvkem c , pak $|A'|=c \cdot |A|$.

(III) Necht' $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A', A'' \in T_{n,n}$. Necht' matice A, A', A'' se shodují ve všech řádcích kromě i -tého, necht'

i -tý řádek matice A' je $(a'_{i1}, a'_{i2}, \dots, a'_{in})$,

i -tý řádek matice A'' je $(a''_{i1}, a''_{i2}, \dots, a''_{in})$,

i -tý řádek matice A je $(a'_{i1} + a''_{i1}, a'_{i2} + a''_{i2}, \dots, a'_{in} + a''_{in})$.

Za těchto předpokladů je $|A|=|A'|+|A''|$.

(IV) Jestliže matice A' vznikla z A výměnou dvou řádků, pak $|A'|=-|A|$.

(V) Jestliže matice A má dvě řádky stejné, pak $|A|=0$.

(VI) $|A^T|=|A|$

Důkaz:

(I) Necht' $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{ij}=0$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|A| = \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdot a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} 0 = 0. \text{ (Protože } a_{i\pi(i)}=0 \text{.)}$$

(II) Necht' A' vznikla z A vynásobením i -tého řádku ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) prvkem $c \in T$. Pak

$$\begin{aligned} |A'| &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a'_{1\pi(1)} \cdots a'_{i-1,\pi(i-1)} \cdot a'_{i\pi(i)} \cdot a'_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a'_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} \cdot (c \cdot a_{i\pi(i)}) \cdot a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= c \cdot \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} = c \cdot |A| \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} \cdot a_{i\pi(i)} \cdot a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} \cdot (a'_{i\pi(i)} + a''_{i\pi(i)}) \cdot a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} \cdot a'_{i\pi(i)} \cdot a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &\quad + \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} \cdot a''_{i\pi(i)} \cdot a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a'_{1\pi(1)} \cdots a'_{n\pi(n)} + \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a''_{1\pi(1)} \cdots a''_{n\pi(n)} \\ &= |A'| + |A''| \end{aligned}$$

(IV) Necht' A' vznikla z A výměnou i -tého a j -tého řádku ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$).

$$\begin{aligned} |A'| &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a'_{1\pi(1)} \cdots a'_{i\pi(i)} \cdots a'_{j\pi(j)} \cdots a'_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= - \sum_{\pi \in S_n} -Sg(\pi) \cdot a_{1((i \leftrightarrow j)\pi)(1)} \cdots a_{i((i \leftrightarrow j)\pi)(i)} \cdots a_{j((i \leftrightarrow j)\pi)(j)} \cdots a_{n((i \leftrightarrow j)\pi)(n)} \\ &= - \sum_{\pi \in S_n} Sg((i \leftrightarrow j)(\pi)) \cdot a_{1((i \leftrightarrow j)\pi)(1)} \cdots a_{i((i \leftrightarrow j)\pi)(i)} \cdots a_{j((i \leftrightarrow j)\pi)(j)} \cdots a_{n((i \leftrightarrow j)\pi)(n)} \end{aligned}$$

Zavedme nový sčítací index $\rho = (i \leftrightarrow j)\pi$. Pak $|A'| = - \sum_{\rho \in S_n} Sg(\rho) \cdot a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = -|A|$.

Je třeba si uvědomit: $Sg((i \leftrightarrow j)\pi) = -Sg(\pi)$ (viz 6.2.3.).

Dále: π proběhne S_n právě tehdy, když ρ proběhne S_n , neboť zobrazení $\varphi: S_n \rightarrow S_n$, $\varphi(\pi) = (i \leftrightarrow j)\pi$ pro každé $\pi \in S_n$, je bijekce.

(V) Necht' A má i -tý řádek stejný jako j -tý řádek ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$).

Vytvořme matici A' tak, že v A vyměníme i -tý a j -tý řádek. Zřejmě $A' = A$. Avšak podle již dokázané (IV) máme $|A'| = -|A|$. Tedy $|A| = -|A|$. Je-li T číselné těleso ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), lze uvažovat takto: $2 \cdot |A| = 0$, $|A| = 0$. Tento důkaz však nemá obecnou platnost: například v tělese $\mathbb{Z}_2$ je $1 = -1$, avšak $1 \neq 0$.

Nyní provedeme důkaz platný pro všechna tělesa T :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in A_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} + Sg((i \leftrightarrow j)\pi) \cdot a_{1((i \leftrightarrow j)\pi)(1)} \cdots a_{n((i \leftrightarrow j)\pi)(n)} \end{aligned}$$

To platí, neboť zobrazení $\varphi: A_n \rightarrow L_n$, $\varphi(\pi) = (i \leftrightarrow j)\pi$ pro každé $\pi \in A_n$, je bijekce ($L_n = \{\rho \in S_n \mid Sg(\rho) = -1\}$). Dále pak pro $\pi \in A_n$ platí:

$$\begin{aligned} &Sg((i \leftrightarrow j)\pi) \cdot a_{1((i \leftrightarrow j)\pi)(1)} \cdots a_{i((i \leftrightarrow j)\pi)(i)} \cdots a_{j((i \leftrightarrow j)\pi)(j)} \cdots a_{n((i \leftrightarrow j)\pi)(n)} \\ &= -Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(j)} \cdots a_{j\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} \quad | \text{ užijeme rovnosti } a_{i\pi(j)} = a_{j\pi(j)} \text{ a } a_{j\pi(i)} = a_{i\pi(i)} \\ &= -Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{n\pi(n)} \end{aligned}$$

Dostáváme:

$$|A| = \sum_{\pi \in A_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} - Sg(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in A_n} 0 = 0.$$

(VI) Označme $B = A^T$.

$$\begin{aligned} |A^T| &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot b_{1\pi(1)} \cdots b_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi) \cdot a_{1\pi^{-1}(1)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} \end{aligned}$$

Nyní změníme sčítací index. Položíme $\rho = \pi^{-1}$.

Dostaneme (užijeme toho, že $Sg(\pi) = Sg(\pi^{-1})$):

$$\begin{aligned} |A^T| &= \sum_{\pi \in S_n} Sg(\pi^{-1}) \cdot a_{1\pi^{-1}(1)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} Sg(\rho) \cdot a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = |A| \end{aligned}$$

7.3. Věta o rozvoji determinantu

7.3.1. DEFINICE

Necht' T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

se nazývá subdeterminant determinantu $|A|$ příslušející prvku a_{ij} a značí se A_{ij} .

Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

se nazývá doplněk prvku a_{ij} v determinantu $|A|$ a značí se D_{ij} .

7.3.2. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

Platí: $D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$

Důkaz: Nechť

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n-i$ výměnami řádků v matici B lze získat tuto matici:

$$B' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Podle věty 7.2.1., část (IV), je $|B'| = (-1)^{n-i} \cdot |B| = (-1)^{n-i} \cdot D_{ij}$.

$n-j$ výměnami řádků v matici $(B')^T$ a transponováním vzniklé matice lze získat tuto matici:

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Podle věty 7.2.1., část (IV), je $|C^T| = (-1)^{n-j} \cdot |(B')^T|$. S ohledem na část (VI) téže věty:

$|C| = (-1)^{n-j} \cdot |B'|$. Pak $|C| = (-1)^{n-j} \cdot (-1)^{n-i} \cdot D_{ij} = (-1)^{2n-(i+j)} \cdot D_{ij}$.

Odtud $(-1)^{i+j} \cdot |C| = (-1)^{2n} \cdot D_{ij} = D_{ij}$. Stačí tedy dokázat, že $|C| = A_{ij}$.

$$|C| = \sum_{\pi \in S_n} \text{Sg}(\pi) \cdot c_{1\pi(1)} \cdots c_{n-1,\pi(n-1)} \cdot c_{n\pi(n)} = \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(n)=n}} \text{Sg}(\pi) \cdot c_{1\pi(1)} \cdots c_{n-1,\pi(n-1)}.$$

Je-li $\pi \in S_n$, $\pi(n)=n$, definujeme $\pi' \in S_{n-1}$ takto: $\pi'(k) = \pi(k)$ pro $k=1, 2, \dots, n-1$.

Zřejmě počet inverzí v permutaci π se rovná počtu inverzí v permutaci π' .

Takže $Sg(\pi) = Sg(\pi')$ (viz definici 6.2.1.).

Nyní změňme sčítací index:

$$|C| = \sum_{\pi' \in S_{n-1}} Sg(\pi') \cdot c_{1\pi'(1)} \cdots c_{n-1, \pi'(n-1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ij}.$$

7.3.3. VĚTA (o rozvoji determinantu podle prvků jedné jeho řady)

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

Platí: $|A| = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \dots + a_{in} \cdot D_{in}$.

Důkaz:

$$a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \dots + a_{in} \cdot D_{in} = a_{i1} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{i2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{in} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{7.2.1.(II)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ 7.2.1.(III)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| .$$

7.3.4. POZNÁMKA (Výpočet determinantů)

(a) křížové pravidlo (viz 7.1.2. (a))

(b) Sarrusovo pravidlo (viz 7.1.2. (b))

(c) Rozvoj determinantu podle prvků jedné jeho řady (nebo sloupce – s ohledem na to, že matice a táž matice transponovaná mají stejný determinant).

Výpočet determinantu n -tého stupně se tak převede na výpočet n determinantů stupně $n-1$ (vzali jsme v úvahu vztah mezi doplňkem prvku v determinantu a subdeterminantem příslušejícím danému prvku).

(d) Úprava matice, jejíž determinant počítáme; přitom používáme větu o základních vlastnostech determinantů (7.2.1.) a následující tvrzení 7.3.5. a 7.3.6.

7.3.5. TVRZENÍ

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí:

Jestliže A je horní trojúhelníková, pak $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Speciálně:

Jestliže A je diagonální, pak $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Důkaz přenecháváme čtenáři.

7.3.6. TVRZENÍ

Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků.

Důkaz:

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n \in T$.

Je třeba ukázat:

$$|A| = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i + c_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + c_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + c_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \dots + c_n \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} .$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \dots + c_{i-1} \cdot \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + c_{i+1} \cdot \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \dots + c_n \cdot \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}$$

dle 7.2.1. (V)

$$\begin{aligned}
& \stackrel{7.2.1.(II)}{=} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_1 \cdot \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ c_n \cdot \vec{a}_n \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} \\
& \stackrel{7.2.1.(III)}{=} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i + c_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + c_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + c_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \dots + c_n \cdot \vec{a}_n \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

7.3.7. POZNÁMKA

Při výpočtu determinantu často kombinujeme různé postupy. Například: matici, jejíž determinant počítáme, nejdříve upravíme (zvláště s využitím tvrzení 7.3.6.) a potom provedeme rozvoj podle prvků jedné řady.

7.4. Determinant součinu matic

7.4.1. LEMMA

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $B \in T_{n,n}$, $\pi \in S_n$. Platí:

$$\begin{vmatrix} \vec{b}_{\pi(1)} \\ \vec{b}_{\pi(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{\pi(n)} \end{vmatrix} = \text{Sg}(\pi) \cdot |B|.$$

Důkaz:

Nechť $\tau, \rho \in S_n$, τ je transpozice.

Matice $\begin{pmatrix} \vec{b}_{(\rho\tau)(1)} \\ \vec{b}_{(\rho\tau)(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{(\rho\tau)(n)} \end{pmatrix}$ vznikla z matice $\begin{pmatrix} \vec{b}_{\rho(1)} \\ \vec{b}_{\rho(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{\rho(n)} \end{pmatrix}$ výměnou dvou řádků,

$$\text{takže dle 7.2.1. (IV) je } \begin{vmatrix} \vec{b}_{(\rho\tau)(1)} \\ \vec{b}_{(\rho\tau)(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{(\rho\tau)(n)} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{b}_{\rho(1)} \\ \vec{b}_{\rho(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{\rho(n)} \end{vmatrix}.$$

Dle věty 6.1.8. existují transpozice $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \in S_n$ ($k \in \mathbb{N}$) tak, že $\pi = id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_k$.

$$\text{Pak } \begin{vmatrix} \vec{b}_{\pi(1)} \\ \vec{b}_{\pi(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{\pi(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{b}_{(id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_k)(1)} \\ \vec{b}_{(id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_k)(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{(id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_k)(n)} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{b}_{(id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_{k-1})(1)} \\ \vec{b}_{(id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_{k-1})(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{(id \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_{k-1})(n)} \end{vmatrix} = \dots = (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{id(1)} \\ \vec{b}_{id(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{id(n)} \end{vmatrix} = (-1)^k \cdot |B| = \text{Sg}(\pi) \cdot |B|.$$

7.4.2. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in T_{n,n}$. Platí: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Důkaz: Pro $n=1$ je věta zřejmě pravdivá. Nechť $n \geq 2$.

Označme

$$\vec{b}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$$

$$\vec{b}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$$

$\vdots$

$$\vec{b}_n = (b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn})$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot \vec{b}_1 + a_{12} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{1n} \cdot \vec{b}_n \\ a_{21} \cdot \vec{b}_1 + a_{22} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{2n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix}$$

K další úpravě využijeme základní vlastnosti determinantů (viz 7.2.1.).

$$\begin{aligned} |A \cdot B| &= \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ a_{21} \cdot \vec{b}_1 + a_{22} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{2n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix} = \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \cdot \sum_{i_2=1}^n a_{2i_2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ \vec{b}_{i_2} \\ a_{31} \cdot \vec{b}_1 + a_{32} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{3n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ \vec{b}_{i_2} \\ a_{31} \cdot \vec{b}_1 + a_{32} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{3n} \cdot \vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot \vec{b}_1 + a_{n2} \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \vec{b}_n \end{vmatrix} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{i_1} \\ \vec{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \vec{b}_{i_n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n)} \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_{\pi(1)} \\ \vec{b}_{\pi(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_{\pi(n)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nyní využijeme výše dokázaného lemmatu 7.4.1.

$$|A \cdot B| = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n)} \cdot \text{Sg}(\pi) \cdot |B| = \left(\sum_{\pi \in S_n} \text{Sg}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n)} \right) \cdot |B| = |A| \cdot |B|$$

7.4.3. VĚTA

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,n}$. Platí:

A je regulární tehdy a jen tehdy, když $|A| \neq 0$.

Důkaz:

(I) Předpokládejme, že A je regulární. Pak existuje matice A^{-1} (viz 5.6.4.). Je $E = A \cdot A^{-1}$, takže $1 = |E| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$. Nutně $|A| \neq 0$.

(II) Předpokládejme, že A je singulární. Chceme: $|A| = 0$.

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$\vdots$

$$\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

Protože $h(A) < n$, jsou vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ lineárně závislé. Existuje $i \in \{1, \dots, n\}$,

$c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n \in T$ tak, že $\vec{a}_i = c_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + c_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + c_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \dots + c_n \cdot \vec{a}_n$.

Pak

$$|A| = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ c_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + c_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + c_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \dots + c_n \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j \cdot \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_j \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j \cdot 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n 0 = 0.$$

Kapitola 8 – Aplikace probrané teorie

8.1. Frobeniova věta

8.1.1. VĚTA (Frobeniova)

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in T$, $b_i \in T$ ($i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$). Uvažme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \quad (*)$$

Nechť $A \in T_{m,n}$ je matice soustavy $(*)$, $A_r \in T_{m,n+1}$ je rozšířená matice soustavy $(*)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Platí: Soustava $(*)$ má aspoň jedno řešení tehdy a jen tehdy, když $h(A) = h(A_r)$.

Důkaz: Označme

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$$

$$\vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$$

$\vdots$

$$\vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Protože $h(A) = h(A^T)$ (viz 5.3.5.), máme $h(A) = \dim \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$.

Protože $h(A_r) = h(A_r^T)$ (viz 5.3.5.), máme $h(A_r) = \dim \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle$.

(I) Nechť soustava $(*)$ má aspoň jedno řešení.

Existují $c_1, c_2, \dots, c_n \in T$, $\vec{b} = c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + c_n \cdot \vec{a}_n$.

Zřejmě $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle \subseteq \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle$.

Ovšem $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle \subseteq \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$, takže $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$.

Celkem $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle$, $h(A) = h(A_r)$.

(II) Nechť $h(A) = h(A_r)$.

Je $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle \subseteq \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle$ a $\dim \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle = \dim \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle$.

Z toho plyne, že $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \rangle$. Pak $\vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$. Existují

tedy $c_1, c_2, \dots, c_n \in T$, $\vec{b} = c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + c_n \cdot \vec{a}_n$ (viz 2.2.7.). Vidíme, že n -tice

$(c_1, c_2, \dots, c_n)$ řeší soustavu $(*)$.

8.2. Cramerova věta

8.2.1. VĚTA (Cramerova)

Nechť T je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in T$ ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$). Uvažme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned} \quad (*)$$

Označme

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

($j=1, 2, \dots, n$).

Platí:

Jestliže $d \neq 0$, pak soustava (*) má právě jedno řešení. V tomto případě pak

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \dots, x_n = \frac{d_n}{d}.$$

Důkaz: Necht' $d \neq 0$. Nejdříve ukážeme, že soustava (*) má řešení. Zapišeme soustavu (*) v maticovém tvaru: $A \cdot X = B$,

$$\text{kde } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$d = |A| \neq 0$, takže matice A je regulární a existuje matice A^{-1} (viz 7.4.3. a 5.6.4.).

Položme $X = A^{-1} \cdot B$. Získali jsme řešení soustavy: $A \cdot X = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = E \cdot B = B$.

Soustava (*) má tedy aspoň jedno řešení; označme ho $(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Zvolme libovolně $j \in \{1, \dots, n\}$, $e_1, e_2, \dots, e_n \in T$.

Položme

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & e_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & e_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & e_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Spočítejme $|A'|$ (použijeme rozvoj podle prvků j -tého sloupce - viz 7.3.3. a 7.2.1. (VI)):

$$|A'| = \sum_{i=1}^n e_i \cdot D'_{ij}.$$

Ovšem $D'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} = D_{ij}$ (viz 7.3.2.), takže $|A'| = \sum_{i=1}^n e_i \cdot D_{ij}$.

Dostali jsme toto:

$$(1) \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} = d$$

$$(2) \sum_{i=1}^n b_i \cdot D_{ij} = d_j$$

$$(3) \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot D_{ij} = 0 \text{ pro } k \in \{1, \dots, n\}, k \neq j.$$

(Uvědomme si, že $\sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot D_{ij}$ je determinant matice, jež má 2 sloupce stejné – totiž sloupce k a j).

Necht' $j \in \{1, \dots, n\}$. Víme, že

$$\begin{array}{lcl} a_{11} \cdot c_1 + a_{12} \cdot c_2 + \cdots + a_{1n} \cdot c_n = b_1 & | \cdot D_{1j} \\ a_{21} \cdot c_1 + a_{22} \cdot c_2 + \cdots + a_{2n} \cdot c_n = b_2 & | \cdot D_{2j} \\ \vdots & \\ a_{n1} \cdot c_1 + a_{n2} \cdot c_2 + \cdots + a_{nn} \cdot c_n = b_n & | \cdot D_{nj} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \cdot (a_{11} \cdot D_{1j} + a_{21} \cdot D_{2j} + \dots + a_{n1} \cdot D_{nj}) \\
& + c_2 \cdot (a_{12} \cdot D_{1j} + a_{22} \cdot D_{2j} + \dots + a_{n2} \cdot D_{nj}) \\
& \vdots \\
& + c_n \cdot (a_{1n} \cdot D_{1j} + a_{2n} \cdot D_{2j} + \dots + a_{nn} \cdot D_{nj}) = \\
& = b_1 \cdot D_{1j} + b_2 \cdot D_{2j} + \dots + b_n \cdot D_{nj}. \\
& c_1 \cdot \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot D_{ij} + c_2 \cdot \sum_{i=1}^n a_{i2} \cdot D_{ij} + \dots + c_{j-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_{i,j-1} \cdot D_{ij} + c_j \cdot \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} + c_{j+1} \cdot \sum_{i=1}^n a_{i,j+1} \cdot D_{ij} + \\
& + \dots + c_n \cdot \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot D_{ij} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot D_{ij}.
\end{aligned}$$

S ohledem na vztahy (1), (2), (3) dostáváme

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_{j-1} \cdot 0 + c_j \cdot d + c_{j+1} \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = d_j.$$

$$c_j \cdot d = d_j$$

$$c_j = \frac{d_j}{d}.$$

8.3. Řešení systémů lineárních rovnic

8.3.1. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in T$, $b_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$). Uvažme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
& a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
& a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m.
\end{aligned} \quad (*)$$

Nechť soustava (**) vznikla ze soustavy (*) užitím konečného počtu následujících úprav:

(1) Nahrazením rovnice tou rovnicí plus jiná rovnice vynásobená nějakým prvkem tělesa T .

(2) Výměnou dvou rovnic.

(3) Vynásobením rovnice nějakým nenulovým prvkem tělesa T .

Pak soustava (**) je ekvivalentní původní soustavě (*) v tom smyslu, že soustavy (**) a (*) mají tatáž řešení.

Důkaz:

Stačí ukázat následující:

Nechť soustava (**) vznikla ze soustavy (*) užitím jedné z úprav (1), (2), (3). Pak soustava (**) je ekvivalentní soustavě (*).

(I) Nechť soustava (**) vznikla užitím úpravy (1).

Nechť $p, q \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p \neq q$, $c \in T$. Nechť soustava (**) má tvar

$$\begin{aligned}
& a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
& \vdots \\
& (a_{p1} + c \cdot a_{q1}) \cdot x_1 + (a_{p2} + c \cdot a_{q2}) \cdot x_2 + \dots + (a_{pn} + c \cdot a_{qn}) \cdot x_n = b_p + c \cdot b_q \\
& \vdots \\
& a_{q1} \cdot x_1 + a_{q2} \cdot x_2 + \dots + a_{qn} \cdot x_n = b_q \\
& \vdots \\
& a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m.
\end{aligned}$$

Předpokládejme, že $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in T^n$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu (*). Chceme ukázat, že $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu (**).

Počítejme:

$$\begin{aligned}
 & (a_{p1} + c \cdot a_{q1}) \cdot y_1 + (a_{p2} + c \cdot a_{q2}) \cdot y_2 + \dots + (a_{pn} + c \cdot a_{qn}) \cdot y_n = \\
 & = a_{p1} \cdot y_1 + c \cdot a_{q1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + c \cdot a_{q2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n + c \cdot a_{qn} \cdot y_n = \\
 & = (a_{p1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n) + c \cdot (a_{q1} \cdot y_1 + a_{q2} \cdot y_2 + \dots + a_{qn} \cdot y_n) = \\
 & = b_p + c \cdot b_q.
 \end{aligned}$$

Nyní naopak. Předpokládejme, že $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in T^n$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu $(**)$.

Chceme ukázat, že $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu $(*)$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
 & a_{p1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n = \\
 & = (a_{p1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n) + c \cdot (a_{q1} \cdot y_1 + a_{q2} \cdot y_2 + \dots + a_{qn} \cdot y_n) \\
 & - c \cdot (a_{q1} \cdot y_1 + a_{q2} \cdot y_2 + \dots + a_{qn} \cdot y_n) = \\
 & = a_{p1} \cdot y_1 + c \cdot a_{q1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + c \cdot a_{q2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n + c \cdot a_{qn} \cdot y_n - c \cdot b_q = \\
 & = (a_{p1} + c \cdot a_{q1}) \cdot y_1 + (a_{p2} + c \cdot a_{q2}) \cdot y_2 + \dots + (a_{pn} + c \cdot a_{qn}) \cdot y_n - c \cdot b_q = \\
 & = b_p + c \cdot b_q - c \cdot b_q = \\
 & = b_p.
 \end{aligned}$$

(II) Necht' soustava $(**)$ vznikla užitím úpravy (2). Je zřejmé, že soustava $(**)$ je ekvivalentní soustavě $(*)$.

(III) Necht' soustava $(**)$ vznikla užitím úpravy (3).

Necht' $p \in \{1, 2, \dots, m\}$, $c \in T$, $c \neq 0$. Necht' soustava $(**)$ má tvar

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
 & \vdots \\
 & c \cdot a_{p1} \cdot x_1 + c \cdot a_{p2} \cdot x_2 + \dots + c \cdot a_{pn} \cdot x_n = c \cdot b_p \\
 & \vdots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m.
 \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in T^n$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu $(*)$. Chceme ukázat, že $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu $(**)$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
 & c \cdot a_{p1} \cdot y_1 + c \cdot a_{p2} \cdot y_2 + \dots + c \cdot a_{pn} \cdot y_n = \\
 & = c \cdot (a_{p1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n) = \\
 & = c \cdot b_p.
 \end{aligned}$$

Nyní naopak. Předpokládejme, že $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in T^n$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu $(**)$.

Chceme ukázat, že $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ řeší soustavu $(*)$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
 & a_{p1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n = \\
 & = c^{-1} \cdot c \cdot (a_{p1} \cdot y_1 + a_{p2} \cdot y_2 + \dots + a_{pn} \cdot y_n) = \\
 & = c^{-1} \cdot (c \cdot a_{p1} \cdot y_1 + c \cdot a_{p2} \cdot y_2 + \dots + c \cdot a_{pn} \cdot y_n) = \\
 & = c^{-1} \cdot c \cdot b_p = \\
 & = b_p.
 \end{aligned}$$

8.3.2. VĚTA

Necht' T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in T$, $b_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$). Uvažme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m.
 \end{aligned} \tag{*}$$

Nechť $A_r \in T_{m,n+1}$ je rozšířená matice soustavy $(*)$,

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Nechť na matici A_r je aplikován Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus (viz 5.4.2.) a na výstupu je získána matice $\overline{A}_r$, nebo $\overline{\overline{A}}_r$. Nechť

$$\overline{A}_r = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} & \overline{b}_1 \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \cdots & \overline{a}_{mn} & \overline{b}_m \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{A}}_r = \begin{pmatrix} \overline{\overline{a}}_{11} & \overline{\overline{a}}_{12} & \cdots & \overline{\overline{a}}_{1n} & \overline{\overline{b}}_1 \\ \overline{\overline{a}}_{21} & \overline{\overline{a}}_{22} & \cdots & \overline{\overline{a}}_{2n} & \overline{\overline{b}}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\overline{a}}_{m1} & \overline{\overline{a}}_{m2} & \cdots & \overline{\overline{a}}_{mn} & \overline{\overline{b}}_m \end{pmatrix}$$

Uvažme následující dvě soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11} \cdot x_1 + \overline{a}_{12} \cdot x_2 + \cdots + \overline{a}_{1n} \cdot x_n &= \overline{b}_1 \\ \overline{a}_{21} \cdot x_1 + \overline{a}_{22} \cdot x_2 + \cdots + \overline{a}_{2n} \cdot x_n &= \overline{b}_2 \\ \vdots & \\ \overline{a}_{m1} \cdot x_1 + \overline{a}_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \overline{a}_{mn} \cdot x_n &= \overline{b}_m. \end{aligned} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{a}}_{11} \cdot x_1 + \overline{\overline{a}}_{12} \cdot x_2 + \cdots + \overline{\overline{a}}_{1n} \cdot x_n &= \overline{\overline{b}}_1 \\ \overline{\overline{a}}_{21} \cdot x_1 + \overline{\overline{a}}_{22} \cdot x_2 + \cdots + \overline{\overline{a}}_{2n} \cdot x_n &= \overline{\overline{b}}_2 \\ \vdots & \\ \overline{\overline{a}}_{m1} \cdot x_1 + \overline{\overline{a}}_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \overline{\overline{a}}_{mn} \cdot x_n &= \overline{\overline{b}}_m. \end{aligned} \quad (***)$$

Platí: Soustava $(**)$ je ekvivalentní soustavě $(*)$ v tom smyslu, že soustavy $(**)$ a $(*)$ mají tatáž řešení. Také soustavy $(***)$ a $(*)$ jsou ekvivalentní.

Důkaz:

Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus (5.4.2.) může provádět následující úpravy ve zpracovávané matici:

(1) výměna dvou řádků

(2) vynásobení řádku nenulovým prvkem tělesa T

(3) nahrazení řádku tímto řádkem plus jiný řádek vynásobený nějakým prvkem tělesa T .

Algoritmus provede pouze konečný počet úprav (1), (2), (3). Tvrzení věty nyní ihned plyne z 8.3.1.

8.3.3. POZNÁMKA

Věta 8.3.2. ukazuje, že k řešení systémů lineárních rovnic můžeme používat Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus.

8.3.4. PŘÍKLAD

Vyřešte soustavu rovnic nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 &= -4 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: Použijeme Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získali jsme tuto ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - 15x_4 &= -14 \\ x_2 + 5x_4 &= 6 \\ x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že zadaná soustava má nekonečně mnoho řešení $(15p - 14, -5p + 6, 2p - 1, p)$, $p \in \mathbb{R}$.

8.3.5. PŘÍKLAD

Vyřešte soustavu rovnic nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_2 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Řešení: Použijeme Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Získali jsme tuto ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -2 \end{aligned} \quad \text{Vidíme, že zadaná soustava má právě jedno řešení } (1, 2, -2).$$

8.3.6. PŘÍKLAD

Vyřešte soustavu rovnic nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10.$$

Řešení: Použijeme Gaussův-Jordanův eliminační algoritmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Získali jsme tuto ekvivalentní soustavu rovnic:

$$x_1 - \frac{5}{3}x_3 = 0$$

$$x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 0$$

$$0 = 1.$$

Vidíme, že zadaná soustava nemá žádné řešení.

8.4. Homogenní systémy lineárních rovnic

8.4.1. VĚTA

Nechť T je těleso, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in T$ ($i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$).

Uvažme následující homogenní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Nechť $A \in T_{m,n}$ je matice soustavy (*),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nechť W je množina všech řešení soustavy (*).

Pak W je podprostor vektorového prostoru T^n a platí vztah $\dim W = n - h(A)$.

Důkaz: Položme $U = T^n$, $V = T^m$. Definujeme zobrazení $\varphi: U \rightarrow V$ tímto předpisem:

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A^T \quad (\vec{x} \in U).$$

(I) φ je homomorfismus:

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in U$. Pak $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot A^T = \vec{x} \cdot A^T + \vec{y} \cdot A^T = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$.

Nechť $\vec{x} \in U$, $c \in T$. Pak $\varphi(c \cdot \vec{x}) = (c \cdot \vec{x}) \cdot A^T = c \cdot (\vec{x} \cdot A^T) = c \cdot \varphi(\vec{x})$.

(II) $\text{Ker } \varphi$:

Nechť $\vec{x} \in U$. Platí:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \text{Ker } \varphi &\Leftrightarrow \varphi(\vec{x}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \cdot A^T = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\vec{x} \cdot A^T)^T = (\vec{0})^T \\ &\Leftrightarrow A \cdot (\vec{x})^T = (\vec{0})^T \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \text{ řeší soustavu } (*) \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \in W \end{aligned}$$

(III) Důsledek: W je podprostor vektorového prostoru U (viz 2.7.4.)

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{Zavedeme označení} \quad \begin{aligned} \vec{b}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ \vec{b}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ &\vdots \\ \vec{b}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}.$$

$$(IV) \quad Im \varphi = \langle \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \} \rangle:$$

$$Im \varphi = \{ \varphi(\vec{x}) | \vec{x} \in U \}$$

$$= \{ \vec{x} \cdot A^T | \vec{x} \in U \}$$

$$= \{ (x_1 \cdot a_{11} + x_2 \cdot a_{12} + \dots + x_n \cdot a_{1n}, x_1 \cdot a_{21} + x_2 \cdot a_{22} + \dots + x_n \cdot a_{2n}, \dots, \\ x_1 \cdot a_{m1} + x_2 \cdot a_{m2} + \dots + x_n \cdot a_{mn}) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in T \}$$

$$= \{ x_1 \cdot (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + x_2 \cdot (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) + \dots + \\ x_n \cdot (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in T \}$$

$$= \{ x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{b}_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in T \}$$

$$= \langle \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \} \rangle.$$

$$(V) \quad dim(Im \varphi) = h(A):$$

$$dim(Im \varphi) = dim(\langle \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \} \rangle) = h(A^T) = h(A).$$

Předposlední rovnost plyne z definice hodnoty matice (definice 5.3.2.), poslední rovnost pak plyne z věty 5.3.5.

$$(VI) \quad \text{Důsledek: Dle věty 3.2.3. platí: } dim(Ker \varphi) + dim(Im \varphi) = dim U.$$

$$\text{Tedy } dim W + h(A) = n.$$