

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM



Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Základy matematiky
Teoretické základy informatiky I

KMA/ZAM
KI/TZI1

Přednáška 03
Definice, axiomy

jiri.cihlar@ujep.cz



O čem budeme hovořit:

- **Druhy definic**
- **Chyby při vyslovování definic**
- **Role axiomů při výstavbě teorií**
- **Příklady axiomatických systémů**

Definice

Co to jsou definice?

Definicí v matematice (z latinského definitio, tedy ohraničení, vymezení) rozumíme jednoznačné určení významu nějakého pojmu.

Pojem, který se definuje, je také nazýván definiendum, zatímco popis významu definovaného pojmu se označuje jako definiens.

Matematika má na rozdíl od všech ostatních věd tuto výhodu: její pojmy jsou definovány naprosto přesně a jednoznačně, každý jim rozumí stejně, nedochází k žádným významovým posunům. Pojmy všech jiných věd jsou vždy více či méně vágní.

Klasická aristotelovská definice

V těchto definicích má definiens dvě části:

- nadřazený pojem (již známý)
- a druhový rozdíl.

Například v definici

„čtverec je pravoúhlý rovnostranný čtyřúhelník“

je definiendum „čtverec“, a definiens se skládá ze dvou částí – „čtyřúhelník“ je nadřazený pojem, a „pravoúhlý rovnostranný“ je druhový rozdíl, který čtverec odlišuje od ostatních čtyřúhelníků.

Další příklady klasických definic

V následujících příkladech definic určíme jejich části (definiendum, definiens, nadřazený pojem i druhový rozdíl):

- Rovnoběžníkem nazýváme takový čtyřúhelník, který má každé dvě protější strany rovnoběžné.
- Dvojciferným číslem nazýváme takové přirozené číslo, které je větší než 9 a menší než 100.
- Racionální funkce je reálná funkce tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy a $Q(x)$ není nulový polynom.

Symbolicky vyjádřené definice

Kromě slovního vyjádření používáme často i definice, které užívají formule predikátového počtu. Abychom vyjádřili fakt, že jde o definici, přidáváme k symbolu oddělujícímu definiendum od definiens jako index symbol D:

- $(\forall a \in N)(\forall b \in N) \quad a \mid b \Leftrightarrow_D (\exists x \in N) \quad x \cdot a = b$
- $(\forall A)(\forall B) \quad A \cap B =_D \{x ; x \in A \wedge x \in B\}$
- $(\forall x \in R)(\forall y \in R) \quad x < y \Leftrightarrow_D x \leq y \wedge x \neq y$

Obecné kvantifikátory na začátku se někdy vynechávají.

Definice indukci

Jsou to konstruktivní definice, které z jednoduchých případů dovolují užitím obecných pravidel vytvářet další objekty patřící pod definiendum.

Definice mocniny s přirozeným exponentem:

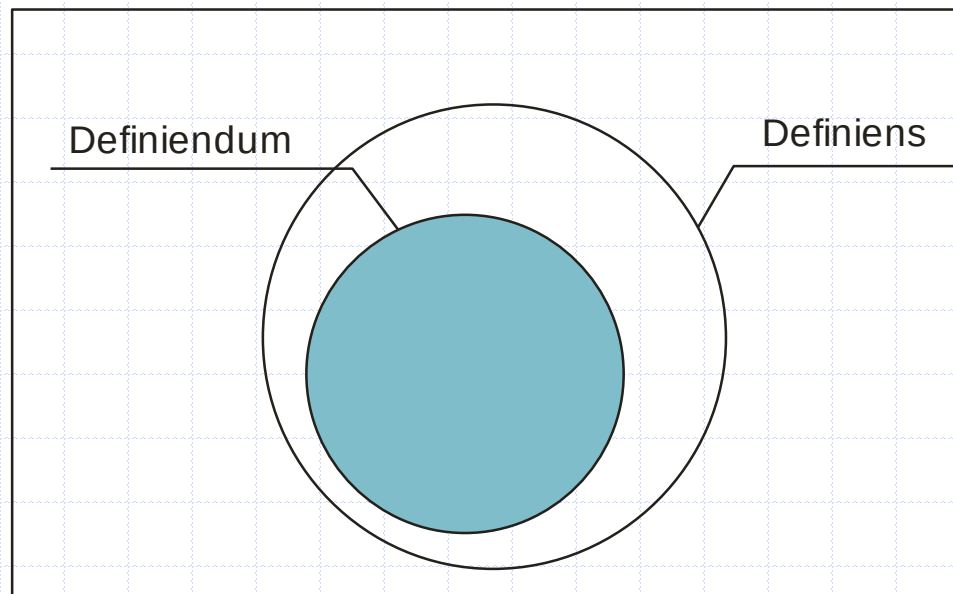
$$\begin{aligned} a^0 &=_D 1 \\ (\forall n \in N_0) \quad a^{n+1} &=_D a \cdot a^n \end{aligned}$$

Připomeňme si, že definice termu, resp. formule predikátového počtu jsou také definice indukci.

Chyby při vyslovování definic

Široké definice

Pod definiens patří i objekty, které definovaný pojem neobsahuje.

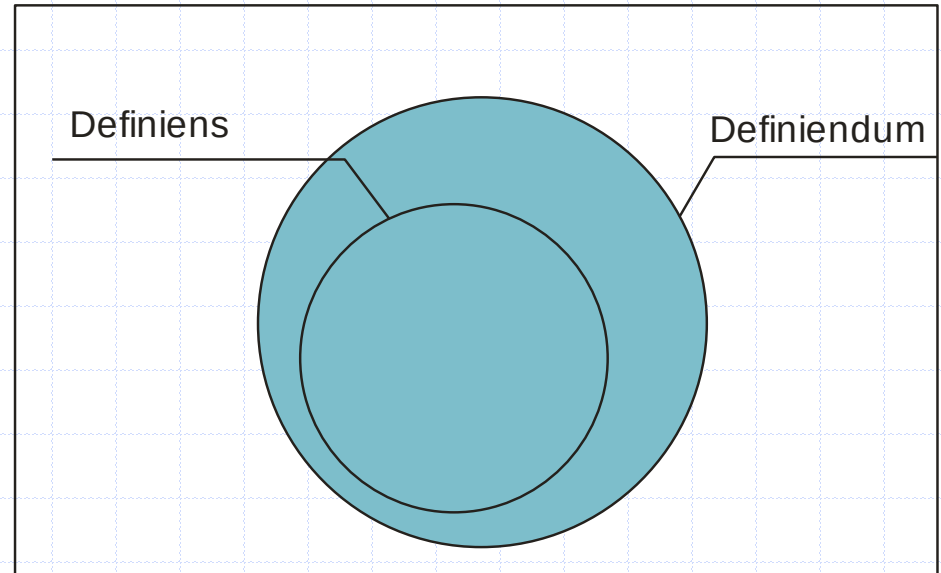


Příklady širokých definic:

- Prvočíslem nazýváme takové přirozené číslo, které je dělitelné jedničkou a sebou samým.
- Odmocninou z nezáporného čísla x nazýváme takové reálné číslo y , pro něž platí, že $y \cdot y = x$.
- Spojnice dvou vrcholů mnohoúhelníku se nazývá úhlopříčka.

Úzké definice

Pod definovaný pojem patří i objekty, které definiens neobsahuje.

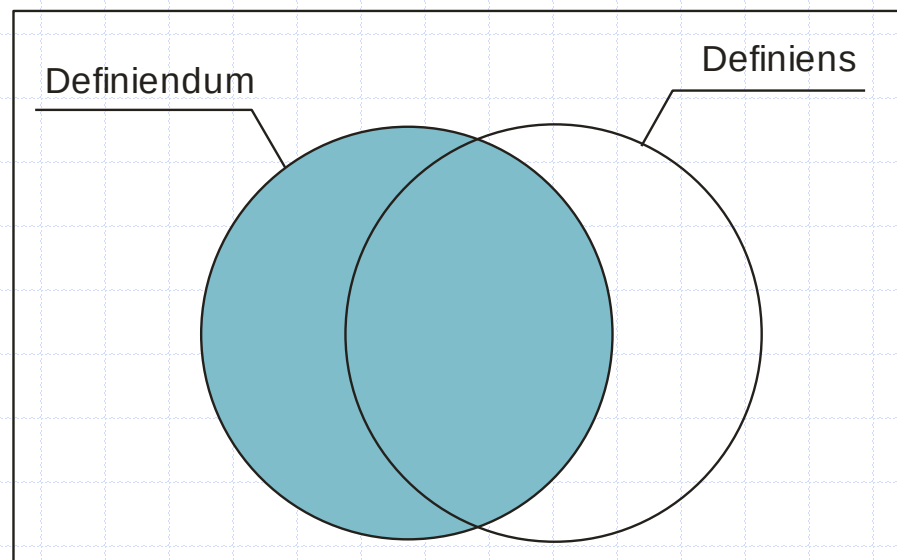


Příklady úzkých definic:

- Elipsy, paraboly a hyperboly se souhrnně nazývají kuželosečky.
- Nezáporná čísla jsou reálná čísla větší než nula.

Posunuté definice

Jsou to takové definice, které jsou současně široké i úzké.



Příklady posunutých definic :

- Kvadratickou funkcí nazýváme reálnou funkci s definičním oborem $\mathbb{R}$ a předpisem $y = ax^2 + bx + c$.
- Imaginárními čísly se nazývají komplexní čísla tvaru $a \cdot i$, kde a je reálné číslo a i je imaginární jednotka.

Definice kruhem

Příklady:

- Celá čísla jsou čísla přirozená, číslo 0 a čísla opačná k přirozeným číslům.

Přirozenými čísly nazýváme kladná celá čísla.

- Součin je výsledek násobení dvou čísel.

Násobení je operace, která dvěma daným číslům přiřazuje jejich součin.

Axiomy

Proč potřebujeme axiomy

Snaha o co největší zpřesnění matematiky byla důvodem pro výstavbu axiomatických teorií.

Základní tvrzení (nazývaná axiomy) jednak zavádí primitivní pojmy, které se tedy jinak nedefinují, a jednak některé jejich důležité vlastnosti, které se nedokazují. Všechny další pojmy se již dále odvozují a všechna následující tvrzení (věty) se dokazují.

Kdokoli se rozhodne uzнат výběr axiomů a systém dokazování ve zkoumané teorii za správný, ten si již může být jistý platností každého tvrzení, které je z nich formálně odvozené.

Požadavky na axiomy

Každá soustava axiomů musí být vnitřně bezesporná, což znamená, že z nich nemohou být odvozeny dva vzájemně si protirečící výroky tvořící tzv. spor.

Proč je to nutné?

Dále požadujeme, aby axiomy byly nezávislé, tzn. aby nebylo možné odvodit některý axiom z ostatních axiomů.

Posledními požadavky, které ale bývají splněny jen u některých teorií, jsou požadavky syntaktické a sémantické úplnosti.

Axiomy Peanovy aritmetiky

$$(A1) \quad (\exists! x)(\forall y) x \neq y'$$

$$(A2) \quad (\forall x)(\forall y) x' = y' \rightarrow x = y$$

$$(A3) \quad (\forall x) x + 0 = x$$

$$(A4) \quad (\forall x)(\forall y) x + y' = (x + y)'$$

$$(A5) \quad (\forall x) x \cdot 0 = 0$$

$$(A6) \quad (\forall x)(\forall y) x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$(A7) \quad [F(0) \wedge (\forall x) (F(x) \rightarrow F(x'))] \rightarrow (\forall x) F(x)$$

Samozřejmé axiomy

Axiomy rovnosti

$$(\forall x) \ x = x$$

$$(\forall x)(\forall y) \ x = y \rightarrow y = x$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) \ x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$$

Axiomy operací

$$(\forall x)(\exists! y) \ y = x'$$

$$(\forall x)(\forall y)(\exists! z) \ z = x + y$$

$$(\forall x)(\forall y)(\exists! z) \ z = x \cdot y$$

Axiomy invariance

$$(\forall x)(\forall y) \ x = y \rightarrow x' = y'$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) \ x = y \rightarrow x + z = y + z$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) \ x = y \rightarrow x \cdot z = y \cdot z$$

Axiomy výrokového počtu

Axiomy

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

Definice dalších logických spojek

$$A \vee B \Leftrightarrow_D (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow_D \neg (\neg A \vee \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow_D (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

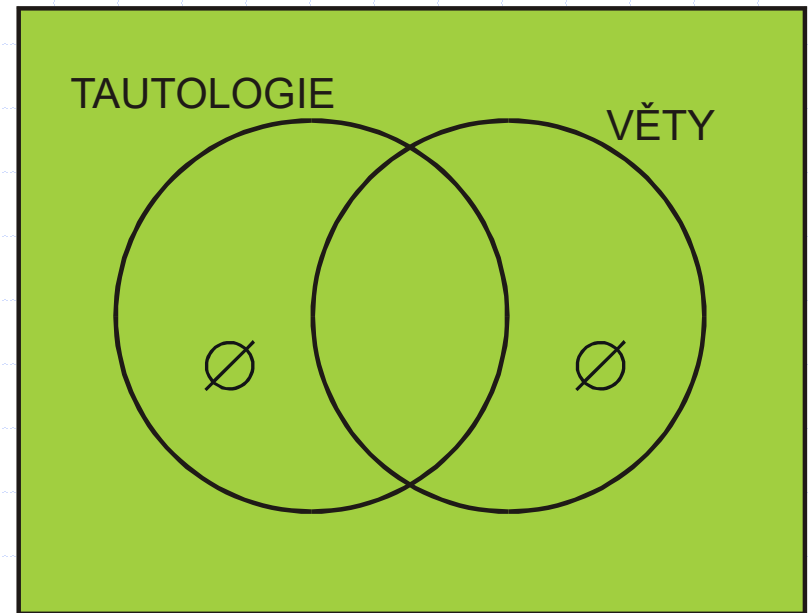
Budování výrokového počtu

Pravidlo substitute:

Dosazením libovolné formule za libovolnou proměnnou do axiomu či odvozené formule vzniká další odvozená formule.

Pravidlo odloučení:

Je-li odvozena formule φ a také formule $\varphi \rightarrow \psi$, pak je odvozena i formule ψ .



Tautologie a odvoditelné věty splývají.

Příklady axiomů eukleidovské geometrie

Axiómy incidence

Každými dvěma různými body prochází jediná přímka.

Na každé přímce leží alespoň dva různé body.

Existuje alespoň jedna trojice bodů, které neleží všechny na téže přímce.

Příklady axiomů uspořádání

Jestliže body A , B , C jsou tři různé body téže přímky a bod B leží mezi body A , C , pak také bod B leží mezi body C , A .
Ze tří navzájem různých bodů A , B , C , ležících na téže přímce, leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma.

Příklady axiomů eukleidovské geometrie

Příklady axiomů shodnosti

Nechť je AB úsečka a CD polopřímka. Potom na polopřímce CD leží jediný bod E různý od C takový, že úsečky AB a CE jsou shodné.

Je-li úsečka AB shodná s úsečkou CD a úsečka CD je shodná s úsečkou EF , pak také úsečka AB je shodná s úsečkou EF .

Axiom rovnoběžnosti

V rovině lze každým bodem mimo přímku vést nejvýše jednu s ní rovnoběžnou přímku.

Příklady axiomů teorie množin

Axiom extenzionality

Množiny, které mají stejné prvky, se rovnají.

Axiom sumy

Pro každou množinu A existuje množina B , která obsahuje právě všechny prvky prvků množiny A .

Axiom potenční množiny

Pro každou množinu A existuje množina B , která obsahuje právě všechny podmnožiny množiny A .

Axiom nekonečna

$$(\exists A)(\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A))$$

Problémy s axiomy

Gödelovy výsledky

První Gödelova věta říká, že kdykoli máme rozumnou teorii hovořící o přirozených číslech (například Peanovu aritmetiku), pak tato teorie není dostatečně silná, aby byla schopná dokázat o přirozených číslech vše. Neexistuje tedy takový axiomatický systém, z něž by se daly odvodit všechny pravdivé věty o přirozených číslech, vždy budou existovat nějaká nedokazatelná tvrzení. Druhá Gödelova věta o neúplnosti dává konkrétní příklad takového nedokazatelného tvrzení. Pro Peanovu aritmetiku je jím například věta „Peanova aritmetika je bezesporná.“

Co je třeba znát a umět?

- Poznat definice, umět je odlišit od vět teorie,
- znát strukturu definic,
- znát různé druhy definic,
- poznat chybně utvořené definice (úzké, široké, posunuté či definice kruhem),
- chápat roli axiomů při výstavbě teorií,
- znát příklady axiomů pro některé teorie.

Děkuji za pozornost

