Lineární algebra (a geometrie I) – úlohy k procvičení – 23.11.2020

1. Uvažme vektorové prostory $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je homomorfismus. Rozhodnutí zdůvodněte. Pokud φ je homomorfismus, pak určete $Ker\varphi$, $dim(Ker\varphi)$ a $dim(Im\varphi)$.
   (a) $\varphi(\vec{x}) = (1 + x_1, x_2)$
   (b) $\varphi(\vec{x}) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$
2. Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

   Jestliže $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, pak $\vec{x} - \vec{y} \perp \vec{x} + \vec{y}$.

   Dokažte. Případně také nakreslete obrázek.

   Připomínka:

   Pro $\vec{v} \in E$ je $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$; $\|\vec{v}\|$ se nazývá norma vektoru $\vec{v}$. Pro $\vec{u}, \vec{v} \in E$ zápis $\vec{u} \perp \vec{v}$ znamená, že $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$; vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou ortogonální.
3. Nechť E je euklidovský prostor, $\vec{x} \in E$. Dokažte, že $(\vec{x}, \vec{0}) = 0$.
4. Nechť E je euklidovský prostor, n je kladné celé číslo, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in E - \{\vec{0}\}$.

   Jestliže $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$ pro všechna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, pak vektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

   Dokažte.
5. Doplňte dané vektory na ortogonální bázi euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$:

$$\vec{x}_1 = (2, 2, 1), \vec{x}_2 = (-2, 1, 2)$$