

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM



Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Základy matematiky

KMA/ZAM

Teoretické základy informatiky I

KI/TZI1

Přednáška 07

Ekvivalence a uspořádání na množině

jiri.cihlar@ujep.cz



O čem budeme hovořit:

- Ekvivalence na množině
- Rozklad množiny podle ekvivalence
- Uspořádání na množině
- Druhy uspořádání
- Hasseovy diagramy uspořádání

Ekvivalence na množině

Ekvivalence na množině M

Definice: Relace R na množině M se nazývá ekvivalence právě tehdy, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Ekvivalence R na množině M splňuje tedy tyto vlastnosti:

$$(\forall x \in M) x R x$$

$$(\forall x, y \in M) x R y \rightarrow y R x$$

$$(\forall x, y, z \in M) x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$$

Příklad ekvivalence v množině M

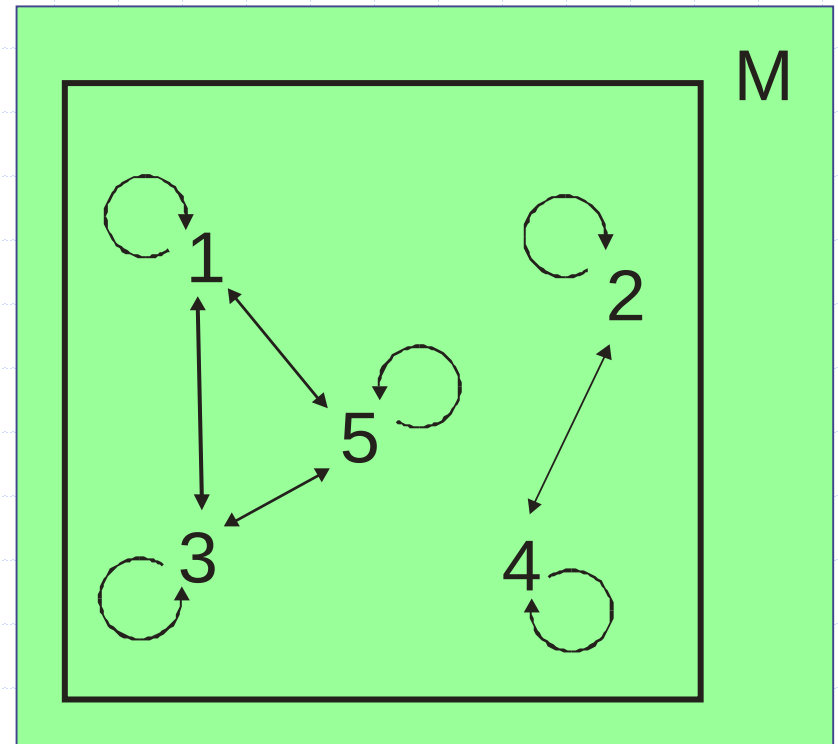
Uvažujme množinu $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ a relaci R v množině M definovanou takto:

$$x R y \Leftrightarrow \text{čísla } x \text{ a } y \text{ mají stejnou paritu}$$

To, že čísla mají stejnou paritu znamená, že buď jsou obě sudá, anebo jsou obě lichá.

Spojnicový graf relace R má tento tvar.

Ověřme, že relace R má všechny tři zmíněné vlastnosti.



Příklad ekvivalence v geometrii

Uvažujme množinu M všech přímek v rovině a relaci R definovanou takto:

$$p R q \Leftrightarrow \text{přímky } p \text{ a } q \text{ jsou rovnoběžné}$$

Vzhledem k tomu, že každá přímka je rovnoběžná sama se sebou, je tato relace reflexivní.

Když p je rovnoběžná s q , je také q rovnoběžná s p , tedy tato relace je symetrická.

Jestliže platí současně, že p je rovnoběžná s q a q je rovnoběžná s r , pak jistě platí že p je rovnoběžná s r , tedy tato relace je i tranzitivní.

Příklad ekvivalence – kongruence

Uvažujme množinu všech celých čísel $\mathbb{Z}$, přirozené číslo $m > 1$ a relaci R_m na množině $\mathbb{Z}$ definovanou takto:

$$x R_m y \Leftrightarrow m \mid x - y .$$

Relace R_m na množině $\mathbb{Z}$ se nazývá kongruence podle modulu m , a zápis $x R_m y$ budeme číst „ **x je kongruentní s y modulo m** “.

Příklady

6 je kongruentní s 0 modulo 2

15 je kongruentní s (-5) modulo 5

120 je kongruentní s 30 modulo 3

6 není kongruentní s 1 modulo 4

Ověřme si, že relace kongruence má všechny tři vlastnosti ekvivalence.

Rozklad množiny podle ekvivalence

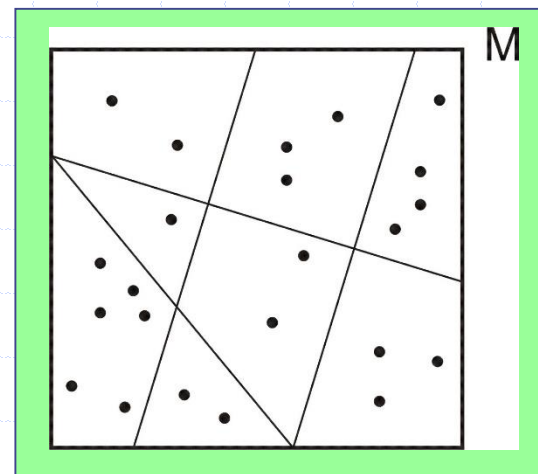
Definice rozkladu množiny

Definice: Rozkladem množiny M se nazývá takový systém jejích podmnožin, který má tyto vlastnosti:

každá podmnožina je neprázdná,
žádné dvě nemají společný prvek,
a jejich sjednocení je rovno množině M .

Podmnožinám, které tvoří rozklad množiny, říkáme třídy rozkladu.

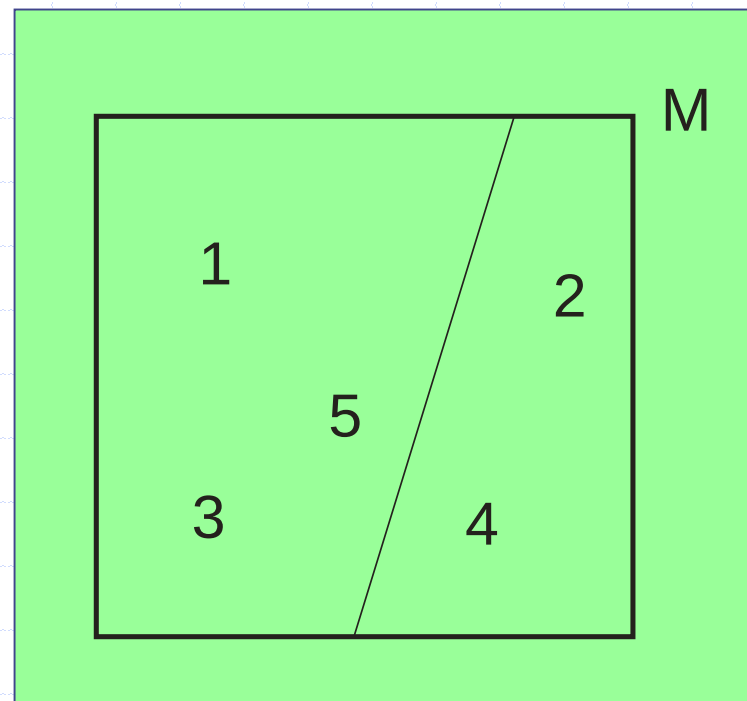
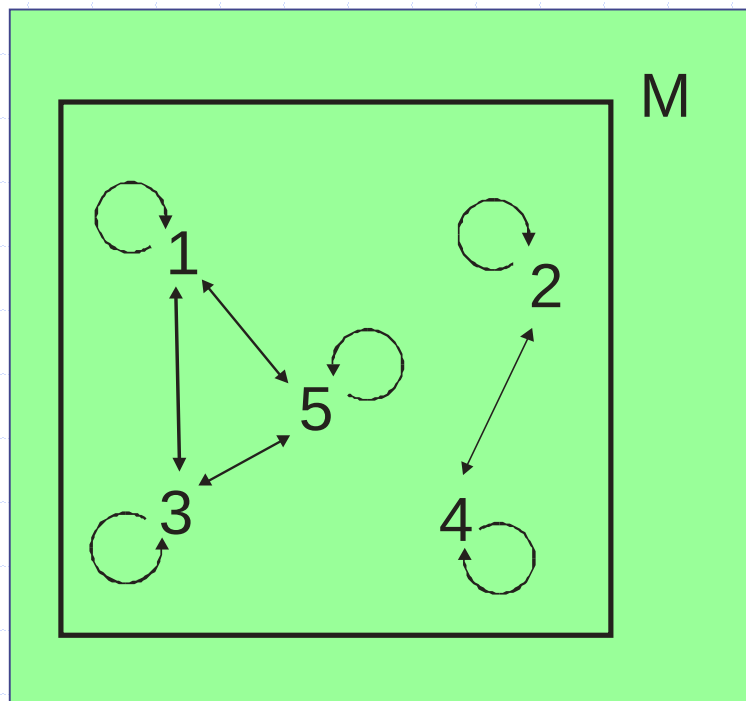
Na obrázku je znázorněn rozklad množiny M , který má 8 tříd rozkladu (jedna z nich je jednoprvková, tři jsou dvouprvkové, atd.)



Ekvivalence a rozklad

Každá ekvivalence v množině M indukuje určitý rozklad množiny M a naopak každý rozklad množiny M indukuje určitou ekvivalenci.

Třídy rozkladu obsahují navzájem ekvivalentní prvky.

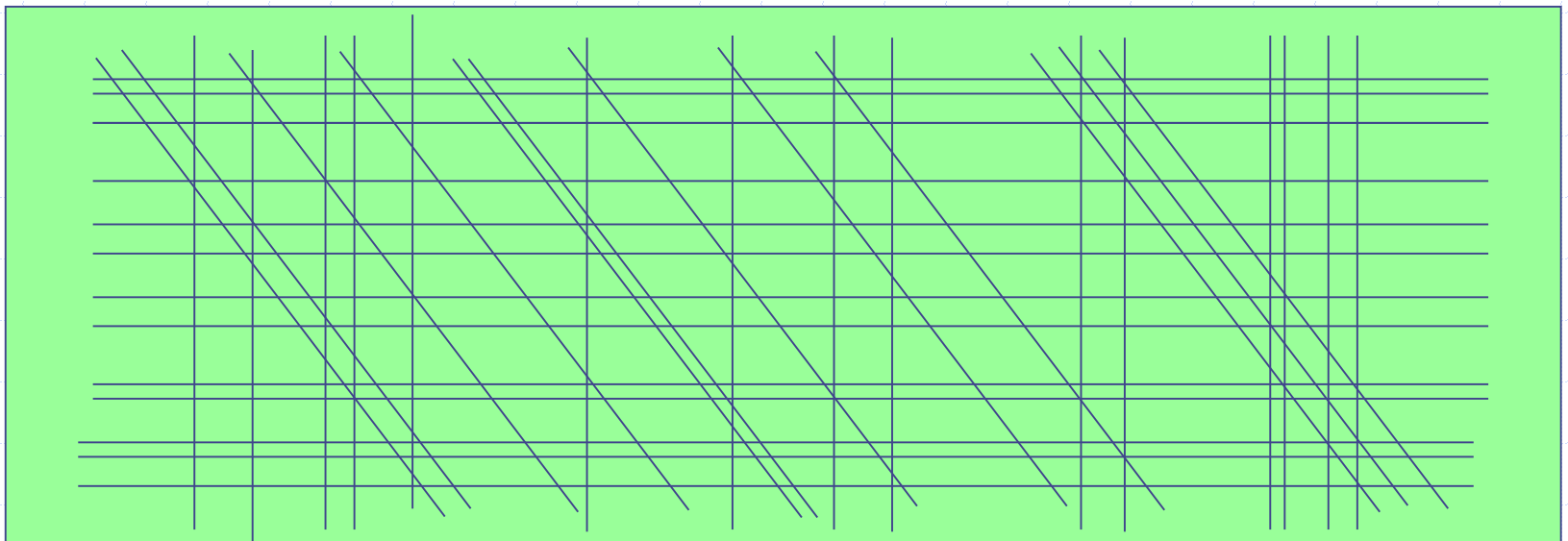


Příklad rozkladu v geometrii

Ukázali jsme, že na množině M všech přímek v rovině je relace rovnoběžnosti ekvivalencí.

Príslušný rozklad budou tvořit podmnožiny, které obsahují všechny navzájem rovnoběžné přímky.

Těmto třídám rozkladu říkáme směry (například svislý směr, vodorovný směr, atd.)



Příklad rozkladu – zbytkové třídy

Ukázali jsme, že na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ je relace kongruence s modulem $m > 1$ ekvivalencí.

Jak budou vypadat příslušné třídy rozkladu?

Pro $m = 2$ budeme mít dvě třídy rozkladu, a to sudá a lichá čísla.

Pro $m = 3$ se vytvoří tři třídy rozkladu, a to:

násobky tří	$\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$
násobky tří zvětšené o 1	$\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$
násobky tří zvětšené o 2	$\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$

Pro $m = 4$ budeme mít čtyři třídy rozkladu, a to: násobky čtyř, násobky čtyř zvětšené o 1, násobky čtyř zvětšené o 2 a násobky čtyř zvětšené o 3.

V každé třídě rozkladu jsou všechna taková celá čísla, která při dělení modulem m dávají stejný zbytek.

Uspořádání na množině

Uspořádání na množině M

Definice: Relace R na množině M se nazývá **uspořádání právě tehdy, když je antisymetrická a tranzitivní.**

Uspořádání R na množině M splňuje tedy tyto vlastnosti:

$$(\forall x, y \in M) \quad x \neq y \wedge x R y \rightarrow \neg y R x$$

$$(\forall x, y, z \in M) \quad x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$$

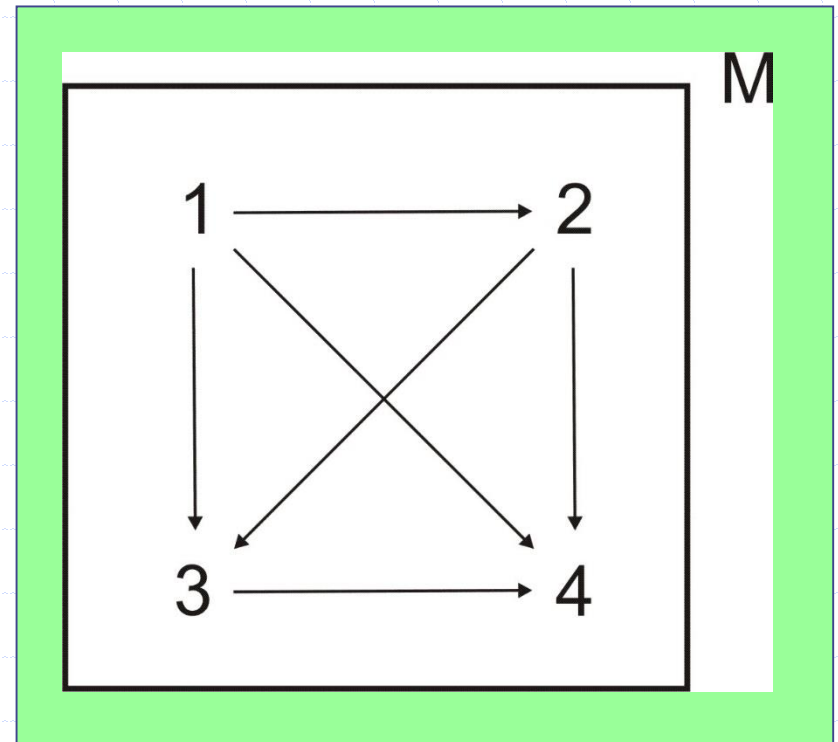
Příklad uspořádání v množině M

Uvažujme množinu $M = \{1; 2; 3; 4\}$ a relaci R v množině M definovanou takto:

$$x R y \Leftrightarrow x < y$$

Spojnicový graf relace R má tento tvar.

Ověřme, že relace R má obě dvě zmíněné vlastnosti.



Druhy uspořádání

Uspořádání v množině M

Definice:

Uspořádání se nazývá **neostré** právě tehdy, když je **reflexivní**.

Uspořádání se nazývá **ostré** právě tehdy, když je **antireflexivní**.

Uspořádání se nazývá **lineární** právě tehdy, když je **konektivní**.

Uspořádání se nazývá **nelineární** právě tehdy, když **není konektivní**.

Uspořádání v množině M - příklad

Relace $<$ v množině N_0 je **ostré lineární uspořádání**, protože platí:

antisymetrie – $(\forall x, y \in N_0) \ x \neq y \wedge x < y \rightarrow \neg y < x$

tranzitivnost – $(\forall x, y, z \in N_0) \ x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$

antireflexivnost – $(\forall x \in N_0) \ \neg x < x$

konektivita – $(\forall x, y \in N_0) \ x \neq y \rightarrow x < y \vee y < x$

Uspořádání v množině M - příklad

Relace $\subseteq$ je **neostré nelineární uspořádání** ve třídě všech množin, protože tato relace:

je antisymetrická – $(\forall X, Y) \quad X \neq Y \wedge X \subseteq Y \rightarrow \neg Y \subseteq X$

je tranzitivní – $(\forall X, Y, Z) \quad X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \rightarrow X \subseteq Z$

je reflexivní – $(\forall X) \quad X \rightarrow X$

ale není konektivní – $(\exists X, Y) \quad X \neq Y \wedge \neg (X \subseteq Y) \wedge \neg (Y \subseteq X)$

Hasseovy diagramy uspořádání

Konstrukce Hasseových diagramů

Hasseův diagram uspořádání je upravený spojnicový graf této relace, v němž se udělají tyto úpravy:

- odstraní se všechny smyčky,

- odstraní se všechny spojnice, které vyplývají z tranzitivity.

Hasseův diagram tedy nerozliší ostré a neostré uspořádání.

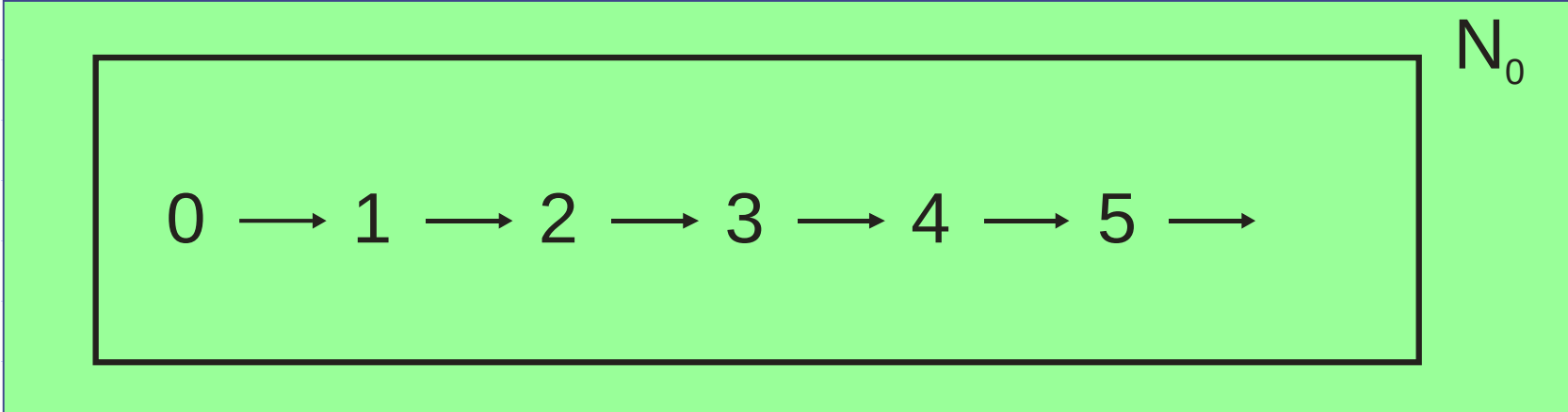
Hasseův diagram relace „být menší“

Relace $<$ v množině N_0 je **ostré lineární uspořádání**.

Od čísla 0 vede šipka jen k číslu 1, od čísla 1 vede šipka jen k číslu 2, od čísla 2 vede šipka jen k číslu 3, atd.

Šipka od 0 do 2 již není zakreslena, protože její existence je zaručena šipkami od 0 do 1 a od 1 do 2 a tranzitivitou.

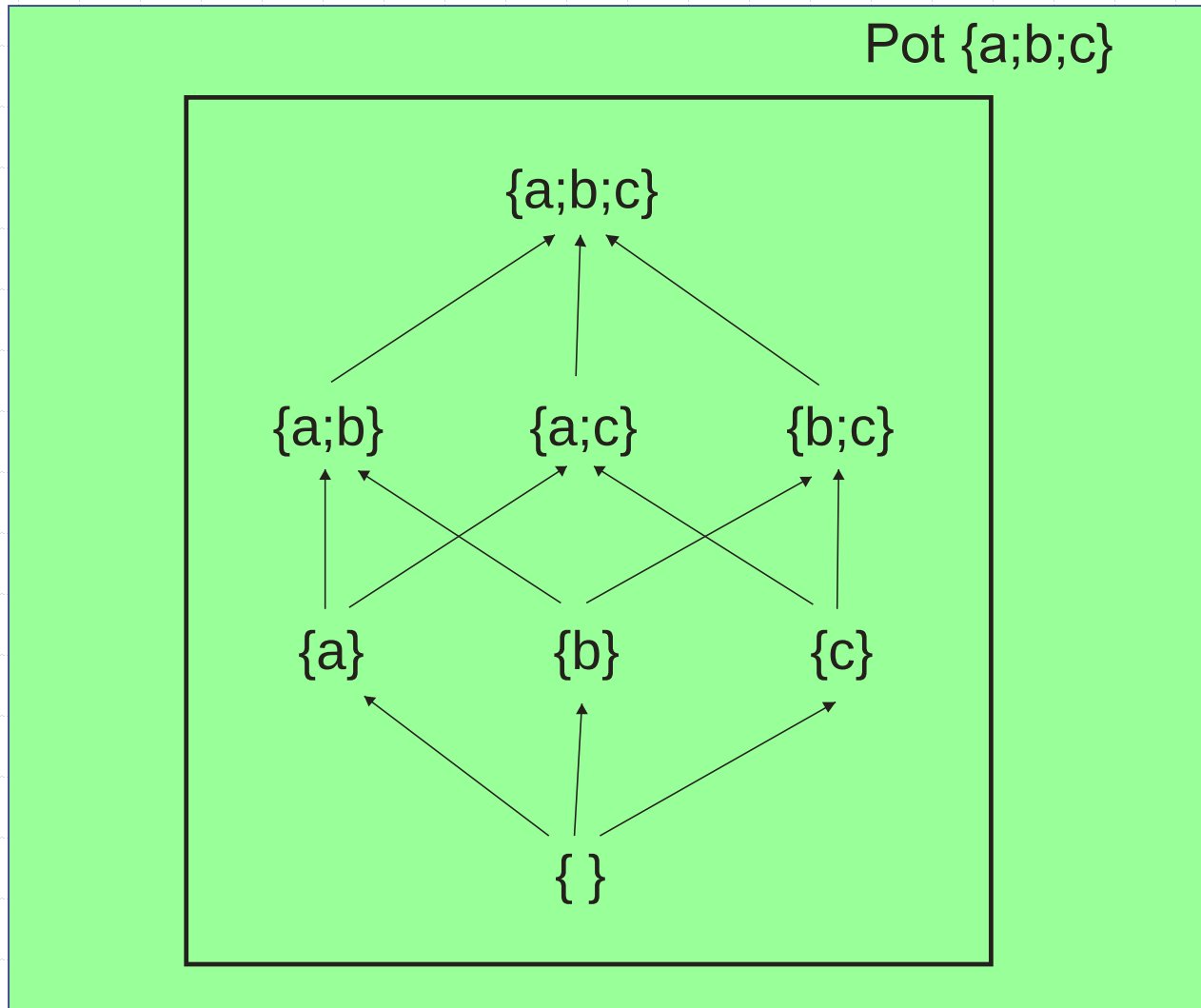
Podobně i další šipky se nezakreslují, protože jsou „nadbytečné“.



$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow$

N_0

Hasseův diagram inkluze



Co je třeba znát a umět?

- Znat definice ekvivalence a uspořádání,
- znát příklady binárních relací z různých částí matematiky, které jsou ekvivalence či uspořádání,
- rozumět souvislosti ekvivalence na množině a rozkladu množiny na třídy,
- znát relaci kongruence podle modulu na množině $\mathbb{Z}$,
- znát různé druhy uspořádání (ostré, neostré, lineární, nelineární),
- umět konstruovat Hasseův diagram uspořádání.

Děkuji za pozornost

