Teorie her

RNDr. Ing. Michaela Tichá, Ph.D.
KMA – Katedra matematiky PřF

26.2.2025

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Maticové hry typu 2x2

Nejprve si ukážeme řešení na hře typu 2x2.
Předpokládejme výplatní matici, která nemá sedlový bod:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Hledáme optimální smíšené strategie
$\mathbf{x}^0 = (x_1, x_2), \mathbf{y}^0 = (y_1, y_2); x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1; x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$
Označíme v cenu hry a pro tyto optimální smíšené strategie musí platit:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \;\; a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \;\; a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v$$

Maticové hry typu 2x2

Řešením předchozí soustavy rovnic a s využitím znalosti $x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$ získáme neznámé x_1, x_2, y_1, y_2, v. Pro zjednodušení označme $a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a}$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a}$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a}$$

$$v = \frac{\det A}{a}$$

Determinant matice spočteme jako $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Maticová hra 2x2 - příklad

Uvažujme výplatní matici:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Snadno ověříme, že matice nemá žádný sedlový bod. $\begin{pmatrix} (4) & [2] \\ [1] & (3) \end{pmatrix}$

Maticová hra 2×2 – příklad

Optimální strategie získáme dosazením do vzorců.

$$a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 4 + 3 - 1 - 2 = 4$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4.3 - 1.2 = 10$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Maticová hra 2×2 – příklad pokračování

Tedy

$$\mathbf{x}^{0T} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{y}^{0T} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$v = \frac{5}{2}$$

Grafické řešení maticové hry $2 \times n$

Nyní předpokládejme výplatní matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Hledáme optimální smíšené strategie

$$\mathbf{x}^0 = (x_1, x_2), \mathbf{y}^0 = (y_1, y_2, \dots y_n),$$

za podmínky

$$x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$$

Uvažujme n funkcí

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Znázorníme graficky části těchto přímek v intervalu $x_1 \in \langle 0, 1 \rangle$.

Grafické řešení maticové hry $2 \times n$

Cílem druhého hráče je minimalizovat výhru prvního hráče. Určíme proto funkci

$$M(x_1) = \min_j M_j(x_1).$$

Cílem prvního hráče je vhodnou volbou hodnoty x_1 maximalizovat svoji výhru. Hledáme tedy hodnotu x_1^0 takovou, že

$$M(x_1^0) = \max_{x_1} M(x_1).$$

řešením hry je pak

$$v = M(x_1^0), \mathbf{x}^0 = (x_1^0, 1 - x_1^0)$$

V optimální smíšené strategii druhého hráče jsou nenulové hodnoty y_k, y_l, které odpovídají přímkám $M_k(x_1), M_l(x_1)$ protínajícím se v bodě (x_1^0, v). Hodnoty y_k, y_l určíme řešením maticové hry s výplatní maticí typu 2x2

$$\begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ a_{2k} & a_{2l} \end{pmatrix}$$

Grafické řešení maticové hry 2 x n - příklad

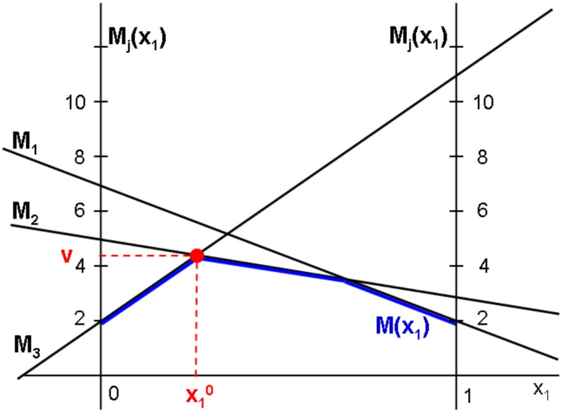
Budeme řešit maticovou hru s výplatní maticí.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Uvažujeme funkce, které znázorníme do grafu

$$\begin{aligned} M_1(x_1) &= 2x_1 + 7x_2 = -5x_1 + 7 \\ M_2(x_1) &= 3x_1 + 5x_2 = -2x_1 + 5 \\ M_3(x_1) &= 11x_1 + 2x_2 = 9x_1 + 2 \end{aligned}$$

Grafické řešení maticové hry 2 x n - příklad



Obrázek: Grafické řešení

Grafické řešení maticové hry 2 x n - příklad

Funkce $M(x_1)$ je zřejmá z grafu. Maximum funkce $M(x_1)$ nabývá na průsečíku přímek $M_2 \bigcap M_3$. Proto $y_1 = 0$. Ostatní složky určíme řešením maticové hry s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 3 + 2 - 11 - 5 = -11$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 3.2 - 11.5 = -49$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a} = \frac{2-5}{-11} = \frac{3}{11}, x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a} = \frac{3-11}{-11} = \frac{8}{11}$$

$$y_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a} = \frac{2-11}{-11} = \frac{9}{11}, y_3 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a} = \frac{3-5}{-11} = \frac{2}{11}$$

$$v = \frac{-49}{-11} = \frac{49}{11}$$

Grafické řešení maticové hry 2xn - příklad

Tedy

$$\mathbf{x}^{0T} = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

$$\mathbf{y}^{0T} = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$$

$$v = \frac{49}{11}$$

Grafické řešení maticové hry mx2

- obdobným postupem z pohledu druhého hráče se dá řešit rovněž maticová hra mx2, to zde probírat nebudeme, ale ukážeme si, jak jednoduše převést hru mx2 na hru 2xn.
- budeme uvažovat, že první hráč je druhý a naopak
- matici transformujeme a změníme znaménko u všech prvků, protože výplatní matice je nyní vztahována k druhému hráči.
- tedy nová matice 2x n bude vypadat

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

- pokud je maticová hra typu 2xn, případně mx2 (kdy lze snadno převést na typ 2xn), můžeme hledat rovnovážné řešení graficky
- v obecném případně mxn lze využít k hledání rovnovážných smíšených strategií lineární programování

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Hledáme Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Uvedené nerovnosti musí platit i pro ryzí strategie

$$\mathbf{x}^T = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{x}^T = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{x}^T = (0, 0, \ldots, 1)$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq v$$

$$a_{11}y_1^0 + a_{12}y_2^0 + \ldots + a_{1n}y_n^0 \leq v$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}y_1^0 + a_{m2}y_2^0 + \ldots + a_{mn}y_n^0 \leq v$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Pokud $v > 0$, můžeme všechny rovnice vydělit výrazem v. Provedeme substituci $q_j = \frac{y_j^0}{v}$, $q_j \geq 0$ a získáme lineární soustavu nerovnic.

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq 1$$

$$q_j \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Obdobně musí platit $\mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}$ i pro ryzí strategie

$$\mathbf{y}^T = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{y}^T = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{y}^T = (0, 0, \ldots, 1)$$

$$v \leq \mathbf{x}^{0T}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

$$a_{11}x_1^0 + a_{21}x_2^0 + \ldots + a_{m1}x_m^0 \geq v$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}x_1^0 + a_{2n}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_m^0 \geq v$$

Pokud je $v > 0$, můžeme všechny rovnice vydělit výrazem v. Provedeme substituci $p_i = \frac{x_i^{\mathbf{0}}}{v}$, $p_i \geq 0$ a získáme lineární soustavu nerovnic.

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \leq 1$$

$$p_i \geq 0$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

K omezujícím podmínkám zbývá doplnit účelové funkce.
Platí:

$$1 = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 = v . \sum_{i=1}^{m} p_i$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{v}$$

První hráč chce maximalizovat cenu hry v, což znamená totéž jako minimalizovat převrácenou hodnotu:

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Obdobně platí:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^0 = v. \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{v}$$

Druhý hráč chce naopak minimalizovat cenu hry v, což znamená totéž jako maximalizovat převrácenou hodnotu:

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Nyní můžeme odvození shrnout do následujících vět.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Věta

Uvažujme maticovou hru s výplatní maticí $\mathbf{A}$ a prostory stategií X, Y.
Pak vyřešením úlohy lineárního programování

$$\max\{v : \mathbf{A}^T\mathbf{x} - \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq 0, v \in \mathbb{R}\}$$

určíme cenu hry a nalezneme optimální strategii prvního hráče.
Vyřešením úlohy lineárního programování

$$\min\{v : \mathbf{A}\mathbf{y} - \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq 0, v \in \mathbb{R}\}$$

určíme cenu hry a nalezneme optimální strategii druhého hráče.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

- Uvedená věta se obecně vztahuje na libovolnou maticovou hru.
- Vzhledem k tomu, že jsme již dospěli k závěru, že každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích, vyplývá z toho, že předchozí formulované úlohy mají vždy optimální řešení.
- Optimální řešení nemusí být jediné, může existovat více možných řešení.
- Pro zjednodušení výpočtů se budeme zaměřovat na specifický tvar úlohy lineárního programování.

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

Věta

Uvažujme maticovou hru s výplatní maticí $\mathbf{A}$ a prostory stategií X, Y, která má kladnou cenu v. Když $\mathbf{p}^0$ je optimálním řešením úlohy

$$\min\{\sum_{i=1}^{m} p_i : \mathbf{A}^T\mathbf{p} \geq \mathbf{1}, \mathbf{p} \geq 0\},$$

pak hra má cenu

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}$$

a optimální strategie prvního hráče je

$$\left(\frac{p_1^0}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}, \frac{p_2^0}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}, \dots, \frac{p_n^0}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0}\right).$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

A když $\mathbf{q}^0$ je optimálním řešením úlohy

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} q_i : \mathbf{A}\mathbf{q} \leq \mathbf{1}, \mathbf{q} \geq 0\},$$

pak hra má cenu

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}$$

a optimální strategie druhého hráče je

$$\left(\frac{q_1^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, \frac{q_2^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, \ldots, \frac{q_n^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}\right).$$

Obecné řešení maticových her pomocí lineárního programování

- Podmínkou pro tuto verzi je kladná cena hry.
- Cenu hry můžeme odhadnout, najdeme opět maxima ve sloupcích a minima v řádcích.
- Pokud se maximin a minimax shodují, jedná se o řešení v ryzích strategiích.
- Pokud se neshodují, hra nemá rovnovážné řešení v ryzích strategiích, ale víme, že cena hry se nachází mezi danými hodnotami.