1. Klasické pravděpodobnostní prostory

(1) Ve třídě je 17 dívek a 13 chlapců. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané skupině čtyř dětí bude lichý počet dívek?
(2) Ve třídě je 30 dětí, z toho dva Josefové a jedna Anna. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané skupině pěti dětí bude Josef a Anna?
(3) 2 bílé a 4 černé korálky náhodně navlékneme na vlasec jehož konce spojíme. Jaká je pravděpodobnost, že bílé korálky nebudou vedle sebe?
(4) Ve třídě je 20 dívek a 12 chlapců. Losem vybereme dva mluvčí. Jaká je pravděpodobnost, že budou různého pohlaví?
(5) Na nit náhodně navlékneme 20 červených korálů a 2 bílé. Jaká je pravděpodobnost, že bílé korály nebudou vedle sebe?
(6) V krabičce je 5 bílých, 7 červených a 3 žluté korálky. Náhodně je všechny navlékneme na vlasec, který svážeme. Jaká je pravděpodobnost, že všechny tři žluté korálky nebudou vedle sebe?
(7) V osudí je 20 červených koulí a 4 bílé koule. Náhodně vybereme 3 koule (aniž bychom je vraceli zpět do osudí). Jaká je pravděpodobnost, že právě 2 koule budou červené?
(8) V osudí je 20 koulí a z toho právě 5 modrých. V každém tahu vyberu náhodně jednu kouli a vrátím ji zpět do osudí. Jaká je pravděpodobnost, že z 10 tahů vytáhnu 7 modrých koulí?
(9) Ve 8.A je 20 dětí, v 8.B je 18 dětí a v 8.C je 22 dětí. Na vánoční besídku bylo náhodně vybráno 10 dětí z osmých ročníků. Jaká je pravděpodobnost, že nejvýše jedno vybrané dítě je z 8.A?

2. Podmíněná pravděpodobnost

(1) Ve švédské osadě žije 55% blonďáků, 30% zrzků a 15% brunetů. Modré oči má 70% blonďáků, 90% zrzků a 10% brunetů. Jaká je pravděpodobnost, že obyvatel je brunet, za předpokladu, že není modrooký.
(2) Pan Kubrt je alergický na kočky a ondatry. Ostatní zvěř mu alergie nepůsobí. V útulku mají 10% psů, 40% koček, 12% lišek a zbytek zvířat tvoří ondatry. Černou barvu má 20% psů a 25% koček. Lišky ni ondatry čené nejsou. Syn pana Kubrta přinesl z útulku zvíře černé jako noc. Jaká je pravděpodobnost, že naň bude pan Kubrt alergický?
(3) 80% dívek a 20% chlapců ve škole má dlouhé vlasy. Poměr dívek a chlapců je 3 : 2. Jaká je pravděpodobnost, že žák s dlouhými vlasy je dívka?
(4) Tři kamarádi chytali ryby. Arnošt chytil 20% všech ryb a z toho 1/5 zlatých, Bonifác 50% a z toho 1/10 zatých a Cecil 30% všech ryb a z toho 1/6 zlatých. Ryby pak nasypali na společnou hromadu a náhodně jednu vybrali. Jaká je pravděpodobnost, že ji chytil Bonifác, pokud je rybka zlatá?

3. Diskrétní náhodné veličiny

3.1. Teoretické úlohy.

(1) Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $-1, 1$ a e, kde e je Eulerovo číslo. Pro pravděpodobnostní funkci platí $P_X(1) = \frac{1}{5}, P_X(e) = \frac{1}{e}$. Spočtěte $P_X(-1)$, střední hodnotu a rozptyl X a nalezněte distribuční funkci F_X.
(2) Diskrétní náhodná veličina $\mathbb{X}$ nabývá pouze hodnot $1, 2$ a 4. Pro její distribuční funkci platí $F_{\mathbb{X}}(1,5) = 0,2$ a $F_{\mathbb{X}}(3) = 0,8$.
Spočtěte hodnoty pravděpodobnostní funkce $P_{\mathbb{X}}$, střední hodnotu a rozptyl $\mathbb{X}$ a nalezněte (celou) distribuční funkci $F_{\mathbb{X}}$.
(3) Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $-1, 1$ a e, kde e je Eulerovo číslo. Pro pravděpodobnostní funkci platí $P_X(1) = \frac{1}{5}, P_X(e) = \frac{1}{e}$. Spočtěte $P_X(-1)$, střední hodnotu a rozptyl X a nalezněte distribuční funkci F_X.

(4) Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2$ a π. Pro pravděpodobnostní funkci platí $P_X(1) = \frac{1}{5}, P_X(2) = \frac{1}{2}$. Spočtěte $P_X(\pi)$, střední hodnotu a rozptyl X a nalezněte distribuční funkci F_X.

(5) Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2$ a 4. Pro distribuční funkci platí $F_X(2) = \frac{1}{5}, F_X(4) = \frac{1}{2}$. Nalezněte hodnoty pravděpodobnostní funkce P_X a střední hodnotu a rozptyl X.

3.2. **Binomické rozdělení.**

(1) Pravděpodobnost, že z náhodně zakoupené cibulky vyroste žlutý tulipán je 40 %. Jaká je pravděpodobnost, že z pěti zakoupených cibulek vyrostou alespoň 2 žluté tulipány?

(2) Krok opilého námořníka má délku 1m. Každou minutu vykročí vpřed s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Jinak zůstane stát na místě. Spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že za 30 minut námořník postoupí vpřed o 20 metrů.

(3) Lék účinkuje s pravděpodobností $0, 8$. Jaká je pravděpodobnost, že z 10 pacientů bude lék účinný u pěti pacientů?

(4) Klíčivost semen je 60%. Spočtěte pravděpodobnost, že z 10 semen jich vyklíčí více než 4 a méně než 8.

(5) Pravděpodobnost, že na minci padne líc je $\frac{1}{2}$. Náhodná veličina X udává počet líců, které padnou při třech hodech. Určete její distribuční funkci a načrtněte její graf. Dále spočtěte její střední hodnotu a rozptyl.

(6) Pravděpodobnost, že na kostce o šesti stěnách padne dvojka je $\frac{1}{6}$. Totéž platí pro jedničku. Náhodná veličina X udává počet jedniček a dvojek, které padnou při dvou hodech. Určete její distribuční funkci a načrtněte její graf. Dále spočtěte její střední hodnotu a rozptyl.

3.3. **Poissonovo rozdělení.**

(1) Počet branek, které padnou během fotbalového utkání 1.fotbalové ligy má Poissonovo rozdělení. Průměrně padnou 2,2 branky za zápas. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybraném utkání padnou 3 branky během prvního poločasu?

4. Spojité náhodné veličiny

4.1. **Teoretické úlohy.**

(1) Náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} -Cx, & x \in (-1, 0) \\ Cx, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

Určete hodnotu konstanty C, distribuční funkci, střední hodnout a rozptyl náhodné veličiny X.

(2) Počítač náhodně volí bod ze čtverce

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

Pravděpodobnost jevu $A \subset \Omega$, který má obsah $\mu(A)$, je

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega)$ je obsah našeho čtverce. Náhodná veličina X přiřazuje elementárnímu jevu $[x, y] \in \Omega$ součet $x + y$. To jest $X([x, y]) = x + y$. Nalezněte distribuční funkci, hustotu, střední hodnout a rozptyl náhodné veličiny X.

(3) Náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^2, & x \in (0, 2) \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

Určete hodnotu konstanty C, distribuční funkci, střední hodnout a rozptyl náhodné veličiny X.

(4) Pravděpodobnostní prostor modeluje střelbu na kruhový terč. Množina elementárních jevů je

$$\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}.$$

Pravděpodobnost jevu $A \subset \Omega$, který má obsah $\mu(A)$, je

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega)$ je obsah terče. Náhodná veličina X přiřazuje elementárnímu jevu $[x,y] \in \Omega$ nejkratší vzdálenost od **okraje** terče. Nalezněte distribuční funkci, hustotu, střední hodnout a rozptyl náhodné veličiny X.

(5) Náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in (-C, 0] \\ 1, & x \in (0, C) \\ 0, & x \notin (-C, C) \end{cases}$$

Určete hodnotu konstanty C, distribuční funkci, střední hodnout a rozptyl náhodné veličiny X.

(6) Náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in (C, 2C) \\ 0, & x \notin (C, 2C) \end{cases}$$

Určete hodnotu konstanty C, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X. Zjistěte hodnotu kvantilu $x_{0,75}$.

(7) Pravděpodobnostní prostor modeluje střelbu na kruhový terč. Množina elementárních jevů je

$$\Omega = \{[r, \alpha] : r \in [0,1], \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Číslo r udává vzdálenost od středu terče a α je úhel, který svírá spojnice středu terče a místa zásahu s kladnou poloosou x. Pravděpodobnost jevu $A \subset \Omega$, který má obsah $\mu(A)$, je

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega)$ je obsah terče. Náhodná veličina X přiřazuje elementárnímu jevu $[r, \alpha] \in \Omega$ úhel α. Nalezněte distribuční funkci, hustotu, střední hodnout a rozptyl náhodné veličiny X.

(8) Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(r) = \begin{cases} 0 & r \in (-\infty, 1) \\ (x-1)^2 & r \in <1, 2> \\ 1 & r \in (2, \infty). \end{cases}$$

Spočtěte její hustotu, střední hodnotu, rozptyl a zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že

$$\frac{3}{2} < X < \frac{7}{4}.$$

(9) Terč má poloměr deset centimetrů. Náhodně na něj střílíme. Náhodná veličina X udává vzdálenost místa zásahu od středu terče a platí pro ni $P(X \leq 10) = 1$ a $P(X < r) = \frac{r^2}{100}$ pro $r \in (0, 10)$. Spočtěte její hustotu, distribuční funkci, střední hodnotu, rozptyl a dolní kvartil.

(10) Zloděj jde na lup do galerie někdy mezi desátou a jedenáctou hodinou. Hlídač přichází náhodně jednou za hodinu. Tuto situaci modelujeme pravděpodobnostním prostorem $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, kde pro jev $A \subset \Omega$ platí $P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$. Symbol μ značí obsah. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ je definována jako $\mathbb{X}(x,y) = |y-x|$ (udává o kolik se zloděj a hlídač minou). Nalezněte její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl a spočtěte pravděpodobnost, že hlídač a zloděj se minou o víc jak půl hodiny.

4.2. **Rovnoměrné rozdělení.**

(1) Tramvaj jezdí v pravidelných osmiminutových intervalech. Z domu na zastáku to trvá 4 minuty. Náhodně vycházíte z domu, přicházíte na zastávku a čekáte na tramvaj. Náhodná veličina X udává dobu od odchodu z domu do příjezdu tramvaje. Spočtěte její hustotu, distribuční funkci, střední hodnotu, rozptyl a horní kvartil.

(2) Náhodně volíme čísla x a y z intervalu $(0, 1)$. Spočtětě, jaká je pravděpodobnost, že $2x < y$.

4.3. **Normální rozdělení.**

(1) Mějme náhodné veličiny $X \sim \mathrm{No}(160, 30)$ a $Y \sim \mathrm{No}(180, 34)$. Pro náhodnou veličinu $Z = \frac{X+Y}{2}$ najděte hodnotu, kterou Z nepřekročí s pravděpodobností $93,32\%$.

(2) Hmotnost balení sýra má rozdělení $\mathrm{No}(1000, 25)$ v gramech. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané balení sýra je těžší než 1000 gramů a lehčí než 1020 gramů?

(3) První výrobní linka produkuje podstavce sošky. Výška podstavce je náhodná veličina s rozdělením $No(5, 1)$. Druhá linka produkuje sošky. Výška sošky je náhodná veličina s rozdělením $No(20, 3)$. Celkovou výškou sošky se rozumí součet výšky sošky a výšky podstavce. Spočtěte pravděpodobnost, že celková výška sošky je větší než 27 (cm).

(4) Hmotnost dětí má normální rozdělení $\mathrm{No}(25, 25)$. Jakou hmotnost nepřevyšuje 84% dětí?

(5) Vnitřní průměr láhví od vína produkovaných výrobní linkou má v milimetrech rozdělení $\mathrm{No}(1,75; 0,002)$. Průměr plastových špuntů má rozdělení $\mathrm{No}(1,87; 0,0016)$. Špunty jsou k lahvím řazeny náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že špunt bude mít menší průměr než láhev a nebude tudíž těsnit?

(6) Délka trubek produkovaných výrobní linkou má normální rozdělení $\mathrm{No}(1000, \sigma^2)$. Spočtěte hodnotu σ pokud víte, že 90% všech trubek je kratších než 1100 mm.

(7) Výška mužů v tanečním souboru je náhodná veličina s rozdělením $X \sim \mathrm{No}(180, 39)$, výška žen má rozělení $Y \sim \mathrm{No}(172, 25)$. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně sestaveném páru bude tanečnice vyšší než tanečník?.

5. CLV

(1) Nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_{1200}$ májí rozdělení $Ro(1, 11)$. Užitím centrální limitní věty spočtěte pravděpodobnost $P(\overline{X} \geq 6, 1)$.

(2) Užitím centrální limitní věty spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že z tisíce hodů klasickou šestistěnnou kostkou bude součet počtu pětek a trojek větší než 320.

(3) Pradvěpodobnost výhry karbaníka v karetní hře je $\frac{1}{3}$. Užitím centrální limitní věty spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že z 1800 her jich vyhraje alespoň 620.

(4) Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka je $\frac{1}{6}$. Užitím centrální limitní věty zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že z 1620 hodů padne méně než 285 šestek.

(5) Tramvaj jezdí v pravidelných desetiminutových intervalech. Náhodně přicházíte na zastávku a měříte dobu čekání na spoj. Užitím centrální limitní věty spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že z 480 příchodů bude celková doba čekání menší než 2380 minut.

(6) Lék účinkuje s pravděpodobností 75%. Užitím centrální limitní věty určete, jaká je pravděpodobnost, že ze 120 pacientů bude lék účinný u více než 100 pacientů.

(7) Chyba měření má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-0, 5; 0, 5)$. Pomocí CLV spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že průměrná hodnota chyby z 300 měření bude větší než 0,2.

(8) Zjistěte užitím CLV, jaký počet šestek z 1000 hodů pravidelnou šestistěnnou kostkou nebude přesažen s pravděpodobností 70%.

6. Ostatní