1 Extrémy na otevřených množinách

DEFINICE 1 (Lokální extrém)**.** Funkce f více proměnných. má v bodě $p \in \mathcal{D}(f)$ *lokální maximum*, resp. *lokální minimum*, jestliže existuje okolí U bodu p takové, že $f(p)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v p *lokální extrém*, jestliže má v p lokální maximum nebo lokální minimum.

Absolutní maximum funkce f na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ je hodnota $\max\{f(x,y);(x,y) \in A\}$. Podobně se definuje *absolutní minimum*, dohromady se nazývají *absolutní extrémy*.

Nahradí-li se v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší*), dostává se definice ostrých lokálních extrémů.

TVRZENÍ 1 (Extrémy a derivace)**.** *Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:*

1. *v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;*
2. *ve vnitřním bodě A, ve kterém f nemá některou z parciálních derivací 1.ř.;*
3. *ve vnitřním bodě A, kde má f všechny parciální derivace 1.ř. rovny 0.*

DEFINICE 2 (Kritické body)**.** Body popsané v předchozí větě se nazývají *kritické body* (pro lokální extrémy).

DŮSLEDEK 1 (Extrémy na otevřených množinách)**.** *Nechť v otevřené množině G má funkce f všechny parciální derivace 1.ř. Má-li f v bodě $p \in G$ lokální extrém, anulují se v tomto bodě parciální derivace 1.ř. (tedy i směrové derivace).*

OPAK NEPLATÍ!

1.1 Postačující podmínky pro extrém

Předchozí podmínky byly nutné pro existenci lokálních extrémů. Uvedeme nyní postačující podmínky.

TVRZENÍ 2 (Postačující podmínky)**.** *Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $p \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$. Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(p)$, což je kvadratická forma proměnných h, k. Potom*

1. *Je-li F pozitivně definitní, nabývá f v p ostré lokální minimum.*
2. *Je-li F negativně definitní, nabývá f v p ostré lokální maximum.*
3. *Je-li F indefinitní, nenabývá f v p lokální extrém.*
4. *Je-li F semidefinitní (a není definitní), nelze o lokálním extrému f v p pomocí F rozhodnout.*

Označíme symbolem $H(f)(p)$ tzv. Hessovu matici

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix} .$$

Je zřejmé, jak se tato matice definuje pro více proměnných než dvě.

TVRZENÍ 3 (Kvadratická forma)**.** *Kvadratická forma F z předchozí věty je*

1. *pozitivně definitní právě když $f_{xx}(p) > 0$ a $f_{xx}(p) \cdot f_{yy}(p) > f_{xy}^2(p)$ (tj. det$(H(f)(p)) > 0$ a $f_{xx}(p) > 0$);*
2. *negativně definitní právě když $f_{xx}(p) < 0$ a $f_{xx}(p) \cdot f_{yy}(p) > f_{xy}^2(p)$ (tj. det$(H(f)(p)) > 0$ a $f_{xx}(p) < 0$);*
3. *indefinitní právě když $f_{xx}(p) \cdot f_{yy}(p) < f_{xy}^2(p)$ (tj. det$(H(f)(p)) < 0$;*
4. *semidefinitní (a není definitní) právě když $f_{xx}(p) \cdot f_{yy}(p) = f_{xy}^2(p)$ (tj. det$(H(f)(p)) = 0$.*

TVRZENÍ 4 (Vlastní čísla)**.** *Nechť λ, η jsou vlastní čísla matice $H(f)(p)$. Kvadratická forma F z předchozí věty je*

1. *pozitivně definitní právě když $\lambda, \eta > 0$;*
2. *negativně definitní právě když $\lambda, \eta < 0$;*
3. *indefinitní (a není definitní) právě když $\lambda.\eta < 0$;*
4. *semidefinitní právě když $\lambda.\eta = 0$.*

Pro funkce tří proměnných je v předchozích tvrzeních jen formální změna (kromě trochu složitější charakterizace definitnosti kvadratické formy pomocí determinantů). Postačující podmínky jsou stejné, kvadratická forma má nyní tvar $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z})^2 f(p)$. Rozhodnout o její definitnosti lze opět pomocí úpravy na součty nebo rozdíly čtverců, nebo pomocí vlastních čísel Hessovy matice.

TVRZENÍ 5 (Vlastní čísla)**.** *Kvadratická forma F z předchozí věty je*
1. pozitivně definitní právě když všechna vlastní čísla matice $H(f)(p)$ jsou kladná;
2. negativně definitní právě když všechna vlastní čísla matice $H(f)(p)$ jsou záporná;
3. indefinitní právě když všechna vlastní čísla matice $H(f)(p)$ jsou nenulová a nejsou všechna záporná nebo kladná;
4. semidefinitní (a není definitní) právě když existuje nulové vlastní číslo matice $H(f)(p)$.

Definitnost lze určit pomocí subdeterminantů Hessovy matice (Sylvestrova věta).

2 Vázané extrémy

Při zkoumání extrémů funkce na polootevřené množině A v rovině se postupuje stejně jako v jednorozměrném případě.Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrném případě jsou hranice nekonečné množiny. Naštěstí však v praxi bývají tyto hranice většinou křivkami a tedy popsány spojitými funkcemi jedné proměnné. Dosazením těchto funkcí do zkoumané funkce se dostane funkce jedné proměnné a pro ni lze zjistit kritické body. Je však nutné si uvědomit, že takto získané např. lokální minimum je lokálním minimem pouze pro hranici a nikoli pro množinu A. Nicméně, vždy lze srovnáním hodnot na všech získaných kritických bodech zjistit absolutní extrémy.

TVRZENÍ 6 (Extrémy na polootevřené množině v rovině)**.** *Nechť A je polootevřená omezená množina v rovině a její hranice patřící k A je grafem parametricky zadané křivky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t), t \in I$.*

Absolutní maximum (minimum) spojité funkce f definované na A je maximální (resp. minimální) hodnota f na kritických bodech f uvnitř A a na kritických bodech funkce $f(\varphi(t), \psi(t)), t \in I$.

TVRZENÍ 7 (Extrémy na polootevřené množině v prostoru)**.** *Nechť A je polootevřená omezená množina v prostoru a její hranice patřící k A je grafem parametricky zadané plochy $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v), z = \tau(u, v), u, v \in I$.*

Absolutní maximum (minimum) spojité funkce f definované na A je maximální (resp. minimální) hodnota f na kritických bodech f uvnitř A a na kritických bodech funkce $f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)), u, v \in I$.

2.0.1 Funkce dvou proměnných

V případě, že je hranice zadána implicitně, není vždy možné dosadit do funkce $f(x, y)$ za y funkci popisující hranici a musí se postupovat jinak.

TVRZENÍ 8 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** *Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x, y) = 0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:*

1. *f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;*
2. *pro každý bod $(x, y) \in A$ je buď $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \neq 0$ nebo $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$.*

Má-li f v bodě $(x_0, y_0) \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,.$$

V předchozí větě se funkce

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

nazývá *Lagrangeova funkce* a parametr λ *Lagrangeův multiplikátor*.

Tvrzení pak říká, že kritické body (x, y) funkce f na A odpovídají kritickým bodům (x, y, λ) funkce F na nějaké otevřené množině U
(tj. $\mathrm{grad}(f + \lambda g)(x, y, \lambda) = 0$).

Zjišťování, zda v (x, y) opravdu lokální extrém nastane, lze opět přenést na zjištění, zda příslušný bod (x, y, λ) je lokálním extrémem funkce $F = f + \lambda g$ na otevřené množině.

TVRZENÍ 9 (Kvadratická forma)**.** *Za předpokladů předchozí věty se označí* $H(h, k) = (h\,\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y})^2 F(p)$*. V kvadratické formě* H *se nahradí* h *nebo* k *druhou proměnnou z rovnice* $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(p) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(p) = 0$ *a získá se kvadratická forma* $\widetilde{H}(t) = at^2$ *jedné proměnné.*

1. *Je-li* $a > 0$*, nabývá* f *v* p *ostré lokální minimum.*

2. *Je-li* $a < 0$*, nabývá* f *v* p *ostré lokální maximum.*

3. *Je-li* $a = 0$*, nelze o lokálním extrému* f *v* p *pomocí* $\widetilde{H}$ *rozhodnout.*

2.0.2 Funkce tří proměnných

Zkoumá-li se funkce tří proměnných, mohou pro vázané extrémy nastat dvě základní situace. Postupy jsou stejné, jako v předchozím případě a podrobnosti budou vynechány.

Prvním případem je hledání extrémů na nějaké implicitně zadané ploše.

Jedna podmínka
Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicí $g(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Předpoklady

1. Existence spojitých parciálních derivací 1.řádu funkce F na otevřené množině obsahující A.

2. Nenulovost alespoň jedné z derivací g_x, g_y, g_z v každém bodě A (tj., hodnost 1 matice $\mathrm{grad} g$ v každém bodě A).

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\widetilde{H}$ dvou proměnných, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h, k, l) = (h\,\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y} + l\,\frac{\partial}{\partial z})^2 F(p)$ dosazením za jednu proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(p) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(p) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(p) = 0$.

Druhý případ je hledání extrémů na průniku dvou implicitně zadaných ploch, což bývá často křivka v prostoru.

Dvě podmínky
Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicemi $g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$.

1. Existence spojitých parciálních derivací 1.řádu funkce F na otevřené množině obsahující A.

2. Hodnost 2 matice s řádky $\mathrm{grad} g, \mathrm{grad} h$ v každém bodě A.

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\widetilde{H}$ jedné proměnné, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h, k, l) = (h\,\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y} + l\,\frac{\partial}{\partial z})^2 F(p)$ dosazením za dvě proměnné z rovnic

$$h\,\frac{\partial g}{\partial x}(p) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(p) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(p) = 0\,,$$

$$h\,\frac{\partial h}{\partial x}(p) + k\,\frac{\partial h}{\partial y}(p) + l\,\frac{\partial h}{\partial z}(p) = 0\,.$$