Soubor úloh LAaG II LS 2016/2017

1. Máte dány 3 body $A\left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $B\left[\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ a $C\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
   (a) Určete těžiště T trojúhelníku ABC.
   (b) Určete ortocentrum O trojúhelníku ABC.
   (c) Určete střed S_o kružnice opsané trojúhelníku ABC a její poloměr r_o.
   (d) Určete střed S_v kružnice vepsané trojúhelníku ABC a její poloměr r_v.
   (e) Určete dělicí poměr $(B, A; S_o)$.

2. Máte dány dvě přímky p a q v trojrozměrném prostoru:
   $p = \{[1+t, 3t, a-t], t \in R\}$, $q = \{[-2s, -3+bs, 1+2s], s \in R\}$.
   V závislosti na parametrech $a \in R$ a $b \in R$ určete vzájemnou polohu těchto přímek. V případě, že jsou rovnoběžné různé/různoběžné, určete jejich vzdálenost/průsečík (v případě, že byste si parametr a nebo b měli volit - není jasně určen z podmínek - volte parametr $a = 1$ a $b = 1$).

3. Máte dány dvě roviny ρ a σ v trojrozměrném prostoru:
   $\rho : 2x - y + 3z + 3 = 0$,
   $\sigma : x = -1 + 3t - 5s, y = 3 - 5t + 6s, z = 2 + 6t - 3s$.
   Určete jejich vzájemnou polohu. V případě, že jsou dané roviny různoběžné, určete jejich průsečnici.

4. Máte dány dvě přímky a rovinu, přímku $p = [1-t, 1+t, 3+2t], t \in \mathbb{R}$, přímku $q = [1-2s, s, 3+3s], s \in \mathbb{R}$ a rovinu $\rho : x+2y-z+2 = 0$. Zjistěte vzájemnou polohu přímek p a q. Pokud je to možné, napište rovnice příčky těchto dvou přímek, která leží v dané rovině a vypočtěte její délku.

5. Máte dánu krychli $ABCDEFGH$ s délkou hrany 1 a bod X, který je středem strany CG. Ověřte, zda jsou přímky AX a CF mimoběžné, určete jejich odchylku a vypočtěte délku jejich nejkratší příčky.

6. Máte dáno: $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ a $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$. Vypočtěte velikost součtu, rozdílu a vektorového součinu vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Dále vypočítejte úhel, který dané vektory svírají.

7. Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in R$ platí nerovnost:
   $$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$
   Využijte Cauchyovu nerovnost. Dále určete, kdy platí rovnost.

8. Určete druh kuželosečky:
   (a) $xy - x - 3y + 1 = 0$
   (b) $xy + y^2 - 4x - 4y = 0$
   (c) $x^2 - y^2 - 2x - 3y + \frac{9}{4} = 0$

(d) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$

9. Máte dánu kuželosečku: $-2x^2 + 3xy - y^2 - 7x + 4y - 3 = 0$. Určete o jakou množinu bodů se jedná a napište souřadnice středu nebo vrcholu. Kuželosečku zakreslete do soustavy souřadnic.

10. Máte dánu kuželosečku: $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$. Určete o jakou množinu bodů se jedná, dále napište souřadnice středu nebo vrcholu, obecné rovnice os, asymptot a tečen ve vrcholech a zakreslete do soustavy souřadnic. (Pozn.: Výše zmíněné body a přímky samozřejmě určujeme pouze pokud je daná kuželosečka má.)

11. Máte dánu kuželosečku: $x^2 + y^2 + 2px + 4y + 8 = 0$. V závislosti na parametru p určete, o jakou kuželosečku se jedná. Pro parametr $p = -4$ určete všechny přímky, které mají s danou kuželosečkou právě jeden společný bod a prochází bodem $M[0, -2]$.

12. Máte dánu kružnici $k_1(S_1[1, 3], r_1 = 2)$ a kružnici $k_2 : x^2+y^2-12x+4y+24 = 0$. Určete chordálu těchto dvou kružnic.

13. Vyšetřete množinu všech středů kružnic, které mají s křivkou $x^2+y^2-4y+3 = 0$ vnější dotyk a současně se dotýkají osy x.

14. Jsou dány tři přímky: $a : 4x - 3y + 10 = 0, b : 6x + py - 45 = 0, c : 2x + y = 0$.

    (a) Určete číslo p tak, aby přímky a, b byly rovnoběžné.

    (b) Najděte rovnici kružnice, která se dotýká rovnoběžných přímek a, b a její střed leží na přímce c.

    a kružnici $k_2 : x^2 + y^2 - 12x + 4y + 24 = 0$.

15. Máte dány dva body $A[0, -2]$, $B[6, 6]$ a přímku $p : x - 7y + 36 = 0$. Určete všechny body přímky p, ze kterých je vidět úsečku AB pod zorným úhlem $\alpha \leq 90°$.

16. Máte dánu přímku $d : x - y + 1 = 0$ a bod $F[1, ?]$. Určete množinu bodů X, pro kterou platí:

    (a) $\frac{|XF|}{|Xd|} = \frac{1}{2}$

    (b) $\frac{|XF|}{|Xd|} = 1$

    (c) $\frac{|XF|}{|Xd|} = 2$

    Vše proveďte pro případ, kdy bod F leží na přímce d a pro případ, kdy je bod F vzdálen od přímky d $\sqrt{2}$. Ve všech případech určete, o jakou množinu bodů se jedná.

17. Máte dány body $A[2, 2]$ a $B[-1, 5]$. Určete množinu všech bodů X, pro něž platí $|AX| = 2|BX|$.