Pascalův čtyřstěn

Petr Gajdoš

Zopakujme si některé poznatky o počtech podmnožin n-prvkové množiny a z nich vyplývající vlastnosti Pascalova trojúhelníku a připomeňme si některé techniky důkazů, aby se nám jednodušeji podařilo proniknout do podstaty analogie tohoto schématu.

1 Pascalův trojúhelník

Při konstrukci Pascalova trojúhelníku můžeme vyjít z rozvoje $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$, například:

$$
\begin{aligned}
M(\emptyset) &= 1 \\
M(\{a\}) &= 1+a \\
M(\{a,b\}) &= (1+a)(1+b) \\
&= 1+a+b+ab \\
M(\{a,b,c\}) &= (1+a+b+ab)(1+c) \\
&= 1+a+b+c+ab+ac+bc+abc \\
M(\{a,b,c,d\}) &= (1+a+b+c+ab+ac+bc+abc)(1+d) \\
&= 1+(a+b+c+d)+(ab+ac+bc+ad+bd+cd)+ \\
&\quad +(abc+abd+acd+bcd)+abcd
\end{aligned}
$$

Obecně píšeme $M(A) = M(\{a_i\}_{i=1}^{n})$. Jak je patrné, jednotliví sčítanci polynomů $M(A)$ indikují podmnožiny dané množiny A. Jelikož

$$M(A \cup \{\alpha\}) = M(A)(1+\alpha) = M(A) + \alpha M(A) \tag{1}$$

vidíme, že celý rozvoj $M(A)$ koresponduje s množinou všech podmnožin, tzv. **potenční množinou množiny** A**,** $P(A)$, přičemž 1 stojí za prázdnou množinu $\emptyset$. Potenční množinu $P(A \cup \{\alpha\})$ totiž vytváříme intuitivně tak, že vezmeme všechny podmnožiny množiny A, čili $P(A)$ a přidáme k nim stejné množiny obohacené o prvek α.

Z rovnosti (1) přímo vyplývá počet sčítanců v $M(A)$ a tedy i velikost potenční množiny $P(A)$.

Věta 1 *Je-li* $|A| = n$, *pak* $|P(A)| = 2^n$.

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu prvků množiny A.

I $|\emptyset| = 0; |P(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$

II Předpokládáme: $|P(A)| = 2^n$
Chceme dokázat: $|P(A) \cup \alpha| = 2^{n+1}$

$|P(A \cup \{\alpha\})$— je stejný jako počet sčítanců v
$M(A \cup \{\alpha\}) = M(A) + \alpha M(A)$, čili dvojnásobek sčítanců v $M(A)$.

cbd.□

Často je potřeba zodpovědět otázku, kolik se v potenční množině příslušné k množině A, pro níž $|A| = n$, nachází jejich podmnožin o velikosti [1] k. K tomuto účelu označme $m_n(x)$ polynom vyniklý z $M(A)$, kde A je n-prvková množina, dosazením x za všechny proměnné:

$$\begin{aligned}
m_0(x) &= 1\\
m_1(x) &= 1 + x\\
m_2(x) &= (1 + x)^2\\
&= 1 + 2x + x^2\\
m_3(x) &= (1 + x)^3\\
&= 1 + 3x + 3x^2 + x^3\\
m_4(x) &= (1 + x)^4\\
&= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4\\
m_n(x) &= (1 + x)^n\\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n
\end{aligned}$$

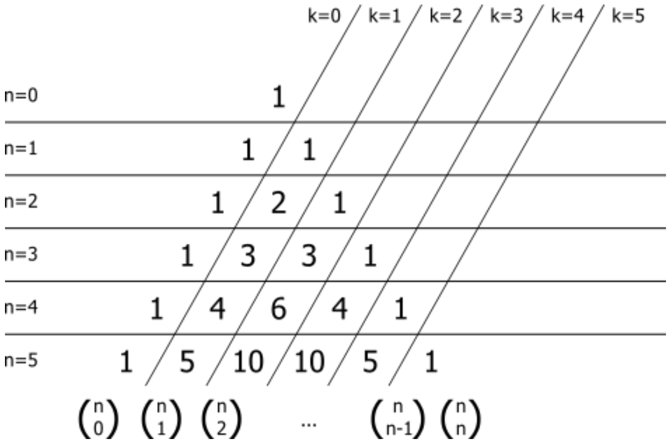
Jak lze koeficienty jednotlivých polynomů $m_n(x)$ zapsat přehledněji, ukazuje obrázek 1. Toto schéma, které však chápeme jako nekonečné, nazýváme **Pascalův trojúhelník.** Můžeme přistoupit k následující definici.

Definice 1 *Pro* $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ *(čteme: n nad k) nechť označuje počet k-prvkových podmnožin (kombinací) n-prvkové množiny.* [2]

Zřejmě platí:

Věta 2 *Nechť množina A má n prvků. Potom*

[1] Kupříkladu $P(\{a, b, c, d\})$ $(n = 4)$ obsahuje šest dvouprvkových $(k = 2)$ podmnožin.
[2] Tzv. **kombinační číslo** $C(n, k)$.



Obrázek 1: Část Pascalova trojúhelníku.

(a) $\binom{n}{0} = 1$ *vyjadřuje počet všech prázdných podmnožin množiny A,*

(b) $\binom{n}{n} = 1$ *vyjadřuje počet všech n-prvkových podmnožin množiny A,*

(c) $\binom{n}{1} = n$ *vyjadřuje počet všech jednoprvkových podmnožin množiny A a*

(d) $\binom{n}{n-1} = n$ *vyjadřuje počet všech $(n-1)$-prvkových podmnožin množiny A.*

Z (a) a (b) víme, jak vypadají dvě ramena nekonečného Pascalova trojúhelníku. Jaká čísla tvoří jeho vnitřek, zodpoví následující věta. Položíme-li kupříkladu $n = 4$ a $k = 3$, vidíme z rovnosti definující $M(\{a, b, c, d\})$ (str. 1), že všechny tříprvkové množiny vznikly

1. zděděním tříprvkových podmnožin pro případ $n = 3$ a
2. z dvouprvkových podmnožin pro případ $n = 3$ přidáním prvku d.

Lze tedy vypočítat počet k-prvkových podmnožin množiny o n-prvcích z údajů pro $(n-1)$-prvkovou množinu: jako součet k-prvkových podmnožin a $(k-1)$-prvkových podmnožin této $(n-1)$-prvkové množiny.

Věta 3 *Nechť je dána množina A o n prvcích. Potom pro $1 \le k < n$ platí:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \tag{2}$$

Věta 3 spolu s tvrzením (a) a (b) věty 2 vyjadřuje rekurzivní vyjádření kombinačních čísel. Tyto tedy tvoří induktivní strukturu, což lze využít v důkazech indukcí po této induktivní struktuře, jak si ukážeme u následující věty.

Explicitní vzorec závislý pouze na parametrech n, k odhadneme následující úvahou. Počet všech možných uspořádaných n-tic prvků [3] z n-prvkové množiny A takových, že se jednotlivé prvky v n-tici neopakují, vyjadřuje součin[4]

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Obdobně, počet všech k-tic neopakujících se prvků n-prvkové množiny A jest

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k+1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Pokud odhlédneme od pořadí v k-ticích a vybereme ze všech možných pouze jedinou ze všech ze stejnými prvky, obdržíme všechny k-prvkové podmnožiny. Všech k-tic se stejnými prvky je právě $k!$.

Věta 4 *Dodefinujme* $0! = 1$. *Pro* $0 \leq k \leq n$ *pak platí*

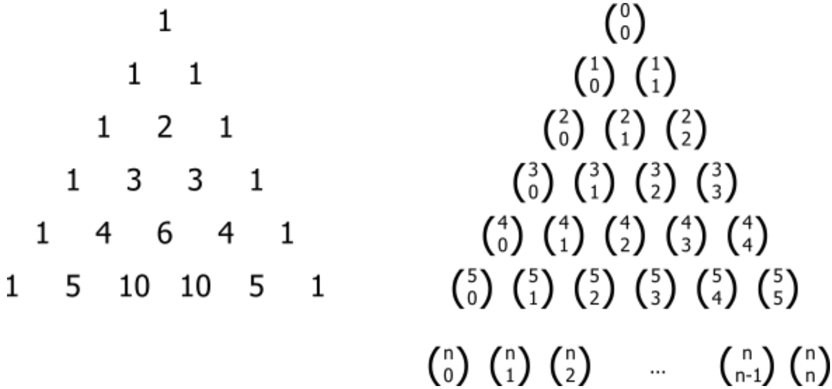
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}. \tag{3}$$

Důkaz. Postupujme indukcí podle induktivní struktury kombinačních čísel patrné z obrázku 2. Nejdříve dokažme tvrzení pro hrany Pascalova trojúhelníka a poté pro jeho vnitřek.

---

[3] n-ticí rozumíme uspořádaný seznam prvků; například souřadnice bodu v rovině či prostoru libovolné dimenze jsou určeny n-ticemi.

[4] Považujme tuto rovnost za definici $n!$, čteme n *faktoriál.*



Obrázek 2: Kombinační čísla v Pascalově trojúhelníku.

I Dle věty 2 (a)

$$1 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = 1$$

Tvrzení (3) tedy pro $k = 0$ platí.

II Dle věty 2 (b)

$$1 = \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = 1$$

Tvrzení (3) tedy pro $k = n$ platí.

III Nyní indukční krok (vnitřek Pascalova trojúhelníku).

Předpokládáme: Věta platí pro $\binom{n-1}{k}$ a $\binom{n-1}{k-1}$.

Chceme dokázat: Věta platí pro $\binom{n}{k}$.

Dle věty 3 postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ &\overset{i.p.}{=} \frac{(n-1)!}{[(n-1)-k]! \cdot k!} + \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \cdot (k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-k) + (n-1)! \cdot k}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\end{aligned}$$

cbd.□

Upravíme-li definiční rovnost $m_n(x)$ (str. 2) tak, že píšeme y místo 1, dostaneme tzv. **binomický rozvoj**

$$(y+x)^n = \binom{n}{0} y^n x^0 + \binom{n}{1} y^{n-1} x + \binom{n}{2} y^{n-2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} y^1 x^{n-1} + \binom{n}{n} y^0 x^n \qquad (4)$$

kde obecný člen je tedy ve tvaru $\binom{n}{k} y^{n-k} x^k$ se souhrnnou mocninou $n-k+k=n$.

2 Pascalův čtyřstěn

Zkusme nyní nalézt analogii Pascalova trojúhelníku v prostoru. Zkoumejme, jaký útvar vznikne rozvojem $(x+y+z)^l$. Takovýto rozvoj budeme nazývat **trinomickým** a koeficienty jednotlivých sčítanců koficienty **trinomickými**[5]. Jeden z možných výsledků zkoumání zachycuje tabulka 1 na straně 7.

K tomu, abychom byli schopni dát do souvislosti koeficienty rozvoje a příslušné exponenty, je nutné zavést systém souřadnic v našich myslích vznikajícím třírozměrném objektu. Jednotlivá jeho patra (příslušná k rozvoji $(a+b+c)^l$) budeme indexovat symbolem l. Koeficienty v daném patře uspořádejme do trojúhelníku tak, že příslušný stupeň mocniny x, y a z bude určovat vzdálenost od jednoho z vrcholů tohoto trojúhelníku (jak je patrné z tabulky 1 a obrázku 3). Souřadnice v dané úrovni můžeme označit podobně jako v Pascalově trojúhelníku (obr. 1).

Je zřejmé, že součet koeficientů jednotlivých sčítanců musí být roven l. S výše zvolenou soustavou souřadnic se tímto dostáváme k následující definici.

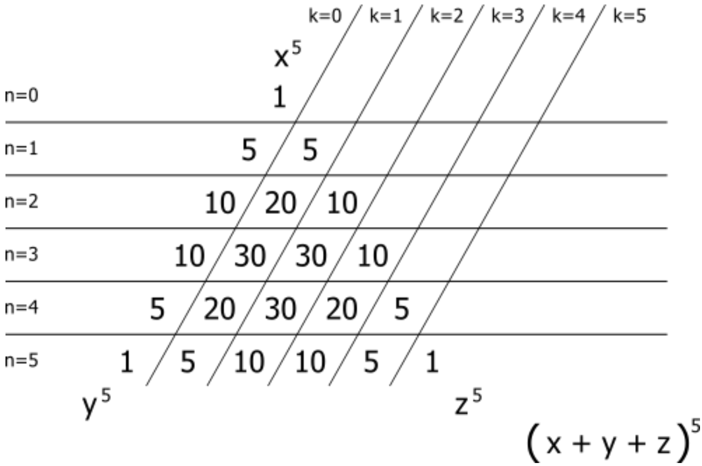
Definice 2 *Pro $0 \le k \le n \le l$, v trinomickém rozvoji označme symbolem* $\left(\begin{array}{c} l \\ n \\ k \end{array}\right)$ *koeficient u $x^{l-n} y^{n-k} z^k$.*

Poznámka. Jinou možností je například $\left(\begin{array}{c} l \\ n \\ k \end{array}\right) x^{l-(n+k)} y^n z^k$. Jak by vy-

[5]Budeme tak vlastně zkracovat termín *polynomický koeficient třetího stupně.*

Rozvoj			Schéma
$(x+y+z)^0$	$=$	1	1
$(x+y+z)^1$	$=$	$x+$ $y+z$	1 1 1
$(x+y+z)^2$	$=$	x^2+ $2xy+2xz+$ $y^2+2yz+z^2$	1 2 2 1 2 1
$(x+y+z)^3$	$=$	x^3+ $3x^2y+3x^2z+$ $3xy^2+3xyz+3xz^2$ $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$	1 3 3 3 6 3 1 3 3 1
$(x+y+z)^4$	$=$	x^4+ $4x^3y+4x^3z+$ $6x^2y^2+12x^2yz+6x^2z^2$ $4xy^3+12xy^2z+12xyz^2+4xz^3$ $y^4+4y^3z+6y^2z^2+4yz^3+z^4$	1 4 4 6 12 6 4 12 12 4 1 4 6 4 1
$(x+y+z)^5$			1 5 5 10 20 10 10 30 30 10 5 20 30 20 5 1 5 10 10 5 1

Tabulka 1: Trinomické rozvoje malých řádů



Obrázek 3: Souřadnicová soustava v jedné úrovni Pascalova čtyřstěnu.

padala soustava souřadnic v trojúhelníku na obr. 3?

Koeficienty trinomických rozvojů je tedy možno uspořádat do trojrozměrného objektu, schématu, které obdobně jako Pascalův trojúhelník chápeme jako nekonečný. Budeme jej nazývat **Pascalův čtyřstěn.**[6] Tyto koeficienty budeme nazývat **trinomickými** a indexovat souřadnicemi (l, n, k). Platí tedy

$$(x+y+z)^l = \sum_{0 \le n,k \le l} \left(\begin{array}{c} l \\ n \\ k \end{array} \right) x^{l-n} y^{n-k} z^k \tag{5}$$

Věta 5 *Stěny Pascalova čtyřstěnu jsou tvořeny Pascalovými tojúhelníky.*

Důkaz. Tato věta shrnuje následujících sedm rovností, které dokážeme zvlášť.

[6]Někdy též **Pascalova pyramida.**

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{I} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(a)}{=} 1 \\
\textbf{II} & \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(b)}{=} \begin{pmatrix} l \\ l \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(c)}{=} \begin{pmatrix} l \\ l \\ l \end{pmatrix} \overset{(d)}{=} 1 \\
\textbf{III} & \begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(e)}{=} \begin{pmatrix} l \\ l \\ m \end{pmatrix} \overset{(f)}{=} \begin{pmatrix} l \\ m \\ m \end{pmatrix} \overset{(g)}{=} \binom{l}{m} \qquad \text{pro } 0 < m < l
\end{array}
$$

I.
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je koeficient u $x^0y^0z^0$, tudíž

$$1 = (a+b+c)^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x^0y^0z^0$$

Odtud plyne (a).
II.
(b) $\begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je koeficientem u $x^{l-0}y^{0-0}z^0 = x^l$. Tento člen má vždy koeficient 1.
(c) $\begin{pmatrix} l \\ l \\ 0 \end{pmatrix}$ je koeficientem u $x^{l-l}y^{l-0}z^0 = y^l$. Tento člen má vždy koeficient 1.
(d) $\begin{pmatrix} l \\ l \\ l \end{pmatrix}$ je koeficientem u $x^{l-l}y^{l-l}z^l = z^l$. Tento člen má vždy koeficient 1.
III.
Dokážeme tvrzení (e); (f) a (g) by byly pravděpodobně analogické. Nejdříve se zabývejme platností následující rovnosti pro $0 < m < l$:

$$\begin{pmatrix} l+1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m-1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Podle definice 2 $\begin{pmatrix} l+1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$ je v rozvoji $(x+y+z)^{l+1}$ koeficient u $x^{(l+1)-m}$.

$y^{m-0} \cdot z^0 = x^{l-m+1} \cdot y^m$. Násobíme-li rozvoj $(x+y+z)^l$ mnohočlenem $(x+y+z)$, člen $\begin{pmatrix} l+1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} x^{l-m+1} y^m$ v rozvoji $(x+y+z)^{l+1}$ vznikne sečtením:

- $x \cdot \alpha \cdot x^{l-m} y^m$ a
- $y \cdot \beta \cdot x^{l-m+1} y^{m-1}$,

kde α a β jsou jisté trinomické koeficienty v rozvoji $(x+y+z)^l$. Podle exponentů dopočítáme

$$\alpha = \begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \beta = \begin{pmatrix} l \\ m-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} l+1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} x^{l-m+1} y^m = \left[\begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m-1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] x^{l-m+1} y^m$$

což dává rovnost (6). Jak vidno, $\begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$ tvoří též induktivní strukturu, stejnou jako binomické koeficienty, jsme tedy na dobré stopě. Dokončení důkazu tvrzení (e) je již pouze formalita, postupujme indukcí po této induktivní struktuře.

1. Případ $l = 0$ a tudíž $m = 0$ je předmětem tvrzení (a). Případy $m = 0$ a $m = l$ jsou již vyřešeny také.
2. Nechť $0 < m < l$, t. j. $1 < l$

   Předpokládáme: $\begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{l}{m}$, tedy též $\begin{pmatrix} l \\ m-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{l}{m-1}$

   Chceme dokázat: $\begin{pmatrix} l+1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{l+1}{m}$

   Podle tvrzení (6), indukčního předpokladu a věty 3 máme

$$\begin{pmatrix} l+1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m-1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{i.p.}{=} \binom{l}{m} + \binom{l}{m-1} \overset{V3}{=} \binom{l+1}{m}$$

Nyní víme, jaké koeficienty najdeme v plášti Pascalova čtyřstěnu. Zbývá tedy jeho vnitřek. Dokážeme analogii věty 3. *cbd.*$\square$

Zkoumáme-li trojúhelníkovité úrovně Pascalova čtyřstěnu pro $l = 4$ a $l = 5$ (obr. 4) a případně ještě i trojúhelník pro $l = 6$ (str. 16), můžeme získat podezření, že platí následující věta.

Věta 6 *Pro* $0 < k \leq n < l$ *platí*

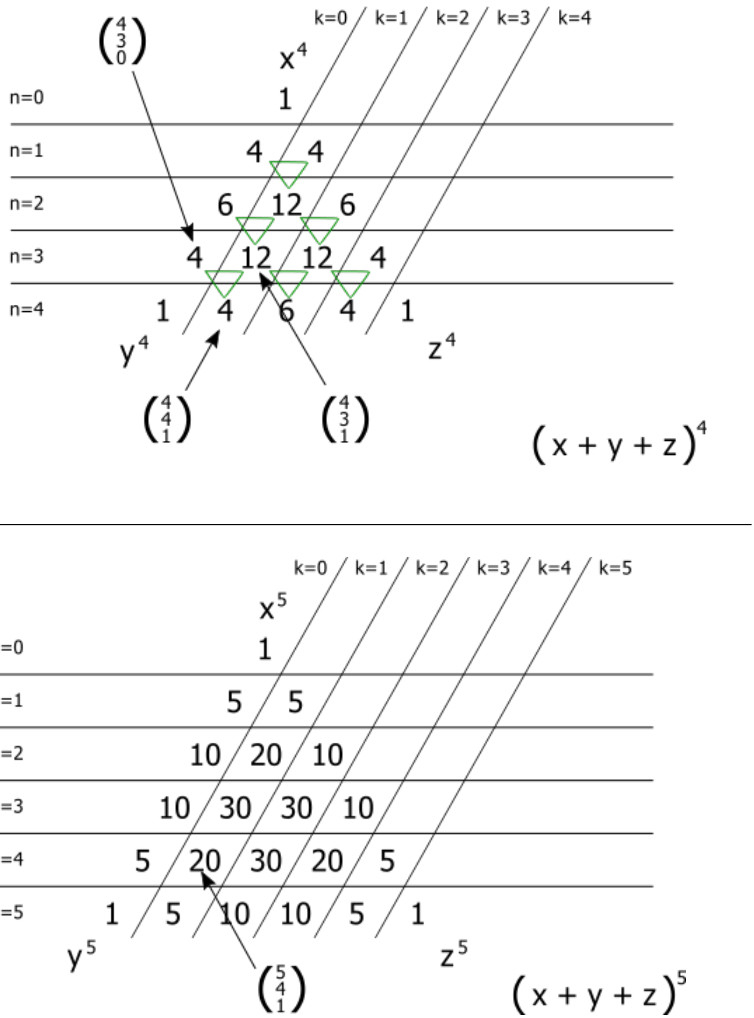
$$\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l-1 \\ n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l-1 \\ n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l-1 \\ n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Důkaz. Dle definice 2 jest $\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix}$ v rozvoji $(x+y+z)^l$ koeficientem u $x^{l-n}y^{n-k}z^k$. Násobíme-li rozvoj $(x+y+z)^{l-1}$ mnohočlenem $(x+y+z)$, člen $\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} x^{l-n}y^{n-k}z^k$ rozvoje $(x+y+z)^l$ vznikne následujícím způsobem:

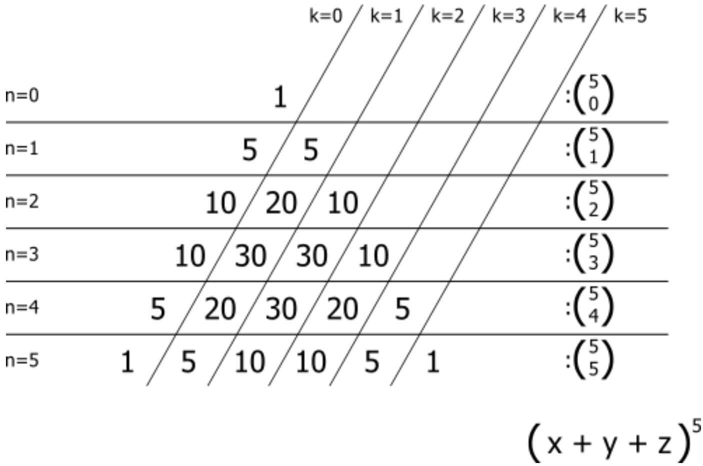
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} x^{l-n}y^{n-k}z^k \\
&= x \cdot \left(\alpha \cdot x^{(l-1)-n}y^{n-k}z^k\right) + \\
&\quad y \cdot \left(\beta \cdot x^{l-n}y^{(n-1)-k}z^k\right) + \\
&\quad z \cdot \left(\gamma \cdot x^{l-n}y^{n-k}z^{k-1}\right) \\
&= x \cdot \left(\alpha \cdot x^{(l-1)-n}y^{n-k}z^k\right) + \\
&\quad y \cdot \left(\beta \cdot x^{(l-1)-(n-1)}y^{(n-1)-k}z^k\right) + \\
&\quad z \cdot \left(\gamma \cdot x^{(l-1)-(n-1)}y^{(n-1)-(k-1)}z^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Pokud si nyní uvědomíme, jak podle definice 2 trinomické koeficienty α, β a γ vypadají, tvrzení (7) již okamžitě vyplyne. *cbd.*$\square$

Probádejme nyní trojúhelník úrovně $l = 5$ v Pascalově čtyřstěnu. Je možno si povšimnout, že jeho řádky jsou symetrické. Ale nejen to. Co se stane, když vydělíme všechna čísla v daném řádku n číslem $\binom{l}{n} = \binom{5}{n}$? Není pochyb, že výsledkem je opět část Pascalova trojúhelníku (obr. 1 na straně 3). Můžeme vyslovit následující zajímavou větu vyjadřující vztah mezi binomickými a trinomickými koeficienty.



Obrázek 4: Induktivní povaha trinomických koeficientů.



Obrázek 5: Dělení řádků trojúhelníku pro $l = 5$ číslem $\binom{5}{n}$.

Věta 7 *Mezi trinomickými a binomickými koeficienty platí vztah*

$$\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} = \binom{l}{n} \cdot \binom{n}{k} \tag{8}$$

K důkazu upotřebíme následující tři pomocná tvrzení.

Lemma 1

$$\binom{u}{v} = \frac{u!}{v!(u-v)!} = \frac{u}{u-v} \cdot \frac{(u-1)!}{v!\,[(u-1)-v]!} = \frac{u}{u-v}\binom{u-1}{v} \tag{9}$$

Lemma 2

$$\binom{u}{v} = \frac{u!}{v!(u-v)!} = \frac{u-v+1}{v} \cdot \frac{u!}{(v-1)!\,[(u-v+1]!} = \frac{u-(v-1)}{v}\binom{u}{v-1} \tag{10}$$

Lemma 3

$$\binom{u}{v} \overset{L2}{=} \frac{u-(v-1)}{v}\binom{u}{v-1} \overset{L1}{=} \frac{u-(v-1)}{v}\frac{u}{u-(v-1)}\binom{u-1}{v-1} = \frac{u}{v}\binom{u-1}{v-1} \tag{11}$$

Nyní dokažme větu 7 indukcí vzhledem k induktivní struktuře Pascalova čtyřstěnu, o níž víme díky větě 6.

Důkaz. 1. Dokážeme, že tvrzení (8) platí pro plášť Pascalova čtyřstěnu.

Je-li $k = 0$, potom $\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} \overset{V5(e)}{=} \binom{l}{n}$

$\binom{l}{n} \cdot \binom{n}{k} \overset{V2(a)}{=} \binom{l}{n} \cdot 1 = \binom{l}{n}$

Tvrzení 8 tedy platí. Případy $k = n$ a $n = l$ analogicky podle věty 5(f) a věty 5(g).

2. Dokážeme, že tvrzení (8) platí pro vnitřek Pascalova čtyřstěnu, tedy pro $0 < k \leq n < l$, $3 \leq l$.

Předpokládáme:

$$\begin{pmatrix} l-1 \\ n \\ k \end{pmatrix} = \binom{l-1}{n}\binom{n}{k}$$

$$\begin{pmatrix} l-1 \\ n-1 \\ k \end{pmatrix} = \binom{l-1}{n-1}\binom{n-1}{k}$$

$$\begin{pmatrix} l-1 \\ n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \binom{l-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1}$$

Chceme dokázat:

$$\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} = \binom{l}{n}\binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} &\overset{V6}{=} \begin{pmatrix} l-1 \\ n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l-1 \\ n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l-1 \\ n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \\
&\overset{i.p.}{=} \binom{l-1}{n}\binom{n}{k} + \binom{l-1}{n-1}\binom{n-1}{k} + \binom{l-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} \\
&\overset{L1,2,3}{=} \binom{l}{n}\frac{l-n}{l}\binom{n}{k} + \binom{l}{n}\frac{n}{l}\binom{n}{k}\frac{n-k}{n} + \binom{l}{n}\frac{n}{l}\binom{n}{k}\frac{k}{n} \\
&= \binom{l}{n}\binom{n}{k}\left[\frac{ln - n^2 + n(n-k) + nk}{ln}\right] = \binom{l}{n}\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

cbd. □

Důsledek 1 *Díky větě 7 můžeme interpretovat číslo* $\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix}$ *jako počet možností, jak vybrat z l-prvkové n-prvkovou podmnožinu a z této pak ještě vybrat* *k-prvkovou podmnožinu.*

Důsledek 2 *Z věty 7 okamžitě vyplývá explicitní vzorec pro trinomický koeficient:*

$$\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} = \binom{l}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{l!}{n! \cdot (l-n)!} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{l!}{(l-n)!(n-k)!k!}$$

Všimněme si korelace jmenovatele výsledku s exponenty v (5).

Na obrázku 6 vidíme jaké krásné symetrie panují v Pascalově čtyřstěnu pro $l = 6$. Už jsme dokázali, že stěny Pascalova čtyřstěnu tvoří Pascalovy trojúhelníky a hrany jednotlivých pater tedy tvoří řádky těchto Pascalových trojúhelníků, o kterých víme, že jsou symetrické[7]. Cílem následující věty je právě toto rozšířit na celý trojúhelník každého patra l v Pascalově čtyřstěnu.

Symetrie zdůvodníme obdobně jako se zdůvodňují symetrie v Pascalově trojúhelníku. Mějme trinomický koeficient $\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix}$. Zdá se, že na jistém místě v řádku n a v jistém místě v diagonále k nalézá se trinomický koeficient o stejné hodnotě.

Věta 8 *Pro trinomické koeficienty platí:*

$$\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} l \\ n \\ n-k \end{pmatrix} \overset{(b)}{=} \begin{pmatrix} l \\ k+(l-n) \\ k \end{pmatrix}$$

Důkaz. (a) vyplývá přímo z věty 7 a symetrie binomických koeficientů:

$$\begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix} = \binom{l}{n}\binom{n}{k} = \binom{l}{n}\binom{n}{n-k} = \begin{pmatrix} l \\ n \\ n-k \end{pmatrix}$$

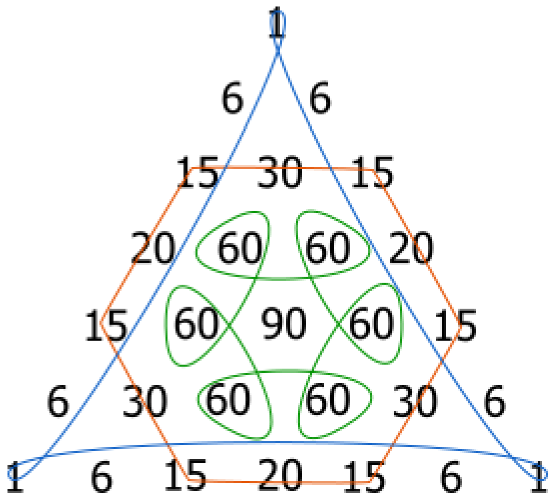
(b) můžeme dokázat využitím důsledku 2:

$$\begin{pmatrix} l \\ k+(l-n) \\ k \end{pmatrix} = \frac{l!}{(l-[k+(l-n)])!\,([k+(l-n)]-k)\,k!} =$$

$$\frac{l!}{(n-k)!(l-n)!k!} = \begin{pmatrix} l \\ n \\ k \end{pmatrix}$$

cbd.□

[7] Důkaz je jednoduchý, přenecháváme čtenáři.



Obrázek 6: Šestá úroveň Pascalova čtyřstěnu.

3 Pascalův simplex

Zobecnění Pascalova trojúhelníku do jakékoliv dimenze je tzv. **Pascalův simplex.** Objekty vyšších dimenzí se hůře představují, ale bylo by zajímavé se zabývat stejnými otázkami, které jsme si položili pro Pascalův trojúhelník a pro Pascalův čtyřstěn. Například: lze Pascalův simplex definovat jako koeficienty d-nomického rozvoje? Pokud ano, lze nad d-nomickými koeficienty též nalézt induktivní strukturu? Platí nějaký vztah mezi d-nomickými koeficienty a koeficienty nižších dimenzí (tedy zobecnění věty 7) a vede tato věta k jednoduché interpretaci a k explicitnímu vzorci? Jaké objekty vymezují 4-nomické koeficienty o stejných hodnotách, jsou pravidelné? Co tvoří hranice Pascalovo simplexu ve čtvrtém rozměru, jsou to čtyři Pascalovy čtyřstěny?