1 Topologie roviny a prostoru

1.1 Základní pojmy množin

Intervaly a okolí

Intervaly v rovině nebo prostoru jsou obdélníky nebo hranoly se stranami rovnoběžnými s osami souřadnic. Podmnožiny intervalů se nazývají omezené množiny.

Okolí bodu je každá množina, která obsahuje nějaký interval s daným bodem ležícím uprostřed intervalu.

Otevřené a uzavřené množiny

Podmnožina A se nazývá otevřená, jestliže je okolím každého svého bodu.

Podmnožina A se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřený.

Hranice množiny

Hranice množiny A je množina těch bodů, jejichž každé okolí obsahuje body z A i z doplňku A.

Množinu A budeme nazývat polootevřenou, jestliže vznikne z otevřené množiny přidáním části nebo celé své hranice

1.2 Konvergence

Konvergence

Posloupnost $\{p_n\}$ bodů konverguje k bodu p, jestliže každé okolí bodu p obsahuje skoro všechny prvky posloupnosti. Pak p se nazývá limita posloupnosti a značí se $\lim p_n = p$ nebo $p_n \to p$.

Bod P je hromadným bodem množiny A, jestliže existuje prostá posloupnost bodů z A konvergující k P (ekvivalentně, každé okolí bodu P obsahuje body A různé od P).

POZNÁMKY

1. Množina A je uzavřená právě když obsahuje limity posloupností z A.
2. Množina A je uzavřená právě když obsahuje svou hranici (ekviv., všechny své hromadné body).
3. Množina je omezená právě když její projekce na osy souřadnic jsou omezené.
4. Posloupnost $\{p_n\}$ konverguje k bodu p právě když projekce bodů p_n na osy souřadnic konvergují k projekcím bodu p.
5. Pro konvergenci platí obdobné věty jako pro konvergenci na přímce, kromě vět obsahující nerovnosti v definičním oboru.

1.3 Anomálie

V euklidovských prostorech dimenze aspoň 2 neexistuje uspořádání, pomocí kterého by se daly definovat intervaly a konvergence.

V euklidovských prostorech dimenze aspoň 2 lze přidat jen jedno nekonečno (nebo nekonečně mnoho). Okolí ∞ jsou doplňky omezených množin.

Lze definovat:

$$r \in \mathbb{R}, r \neq 0 \Rightarrow r.\infty = \infty\,, \quad \forall p, p \pm \infty = \infty\,.$$

2 Funkce více proměnných

2.1 Definice

Definice funkce více proměnných

Zobrazení f z nějaké podmnožiny roviny nebo prostoru do reálných čísel se nazývá reálná funkce dvou, resp. tří proměnných a značí se $f(x, y)$ nebo $f(x, y, z)$ pro $x, y, z \in \mathbb{R}$, nebo $f(p)$, kde p je bod roviny nebo prostoru.

Definiční obor funkce f (značí se $\mathcal{D}(f)$) je množina bodů p, pro která je $f(p)$ zadána nebo, pokud není zadána, pro která má $f(p)$ smysl.

Obor hodnot funkce f je množina reálných čísel $f(p)$ pro p z definičního oboru f.

Grafem funkce f dvou proměnných je množina $\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \mathcal{D}(f)\}$ v prostoru. Podobně se definuje graf funkce tří proměnných, který leží ve čtyřrozměrném prostoru.

2.2 Vlastnosti

Vlastnosti funkcí

Funkce, která má jednobodový obor hodnot, se nazývá konstantní (tedy $f(p) = f(q)$ pro všechna $p, q \in \mathcal{D}(f)$)).

Funkce f se nazývá sudá (resp. lichá), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $p \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-p \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-p) = f(p)$ (resp. $f(-p) = -f(p)$) pro všechna $p \in \mathcal{D}(f)$.

Říkáme, že funkce f je omezená (resp. shora omezená nebo zdola omezená), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(p)| \leq k$ (resp. $f(p) \leq k$, nebo $f(p) \geq k$) pro všechna $p \in \mathcal{D}(f)$.

Jsou-li f, g funkce, budeme značit $f + g, f \cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě p postupně $f(p) + g(p), f(p) \cdot g(p), f(p)/g(p)$.

Složení $f \circ (g_1, g_2)$, kde f, g_1, g_2 jsou funkce dvou proměnných, definujeme jako funkci, která má v bodě (x, y) hodnotu $f(g_1(x, y), g_2(x, y)))$.

3 Spojitost

3.1 Definice

DEFINICE 1 (Spojitost)**.** Nechť f je funkce, $p \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{p_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k p nechť $\lim f(p_n) = f(p)$. Pak říkáme, že f je spojitá v bodě p a tento bod se nazývá bodem spojitosti funkce f.

Je-li f spojitá v každém bodě množiny A, říkáme, že f je spojitá na množině A.

Je-li f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, říkáme, že f je spojitá.

TVRZENÍ 1 (Spojitost pomocí okolí)**.** *Nechť f je funkce a p je bod jejího definičního oboru. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *f je spojitá v p.*
2. *Pro každé okolí U bodu $f(p)$ existuje okolí V bodu p takové, že $f(q) \in U$ jakmile $q \in V$ a $f(q)$ je definováno.*
3. *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta < 0$ tak, že*

$$|q - p| < \delta, q \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow |f(q) - f(p)| < \varepsilon\,.$$

3.2 Spojitost operací

TVRZENÍ 2 (Spojitost aritmetických operací)**.** *Jsou-li funkce f, g spojité v bodě p, jsou i funkce $f + g, f \cdot g$ a f/g (v případě $g(p) \neq 0$) spojité v bodě p.*

Součet, součin a podíl spojitých funkcí je spojitá funkce.

Racionální funkce jsou spojité.

TVRZENÍ 3 (Spojitost složení)**.** *Mějme reálné funkce dvou proměnných f, g_1, g_2. Jsou-li g_1, g_2 spojité v bodě (x, y) a f je spojitá v bodě $(g_1(x, y), g_2(x, y))$, je $f \circ (g_1, g_2)$ spojitá v bodě (x, y).*

(Stejně pro libovolná další složení.)

Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.

Je-li f spojitá funkce, je i $|f|$ spojitá funkce.

3.3 Vlastnosti

TVRZENÍ 4 (Zachovávání souvislosti). *1. Je-li f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu J a p, q jsou body J s hodnotami $f(p) < 0 < f(q)$, pak existuje $r \in J$ s hodnotou $f(r) = 0$.*

2. Spojitá funkce zobrazuje interval (souvislou množinu) na bod nebo na interval.

TVRZENÍ 5 (Zachovávání kompaktnosti). *1. Spojitá funkce zobrazuje uzavřený interval (nebo uzavřenou omezenou množinu) na bod nebo na uzavřený omezený interval (nebo na uzavřenou omezenou množinu, resp.).*

2. Spojitá funkce dosahuje na uzavřené omezené množině A své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body $c, d \in A$ takové, že

$$f(c) = \sup_{p \in A} f(p)\,, \quad f(d) = \inf_{p \in A} f(p)\,.$$

4 Limita

4.1 Definice

DEFINICE 2 (Definice limity). Nechť q je hromadný bod definičního oboru funkce f. Říkáme, že limita funkce f v bodě p se rovná r (značení $\lim_{p \to q} f(p) = r$, nebo $f(p) \to r$ pro $p \to q$), jestliže $\lim f(p_n) = r$ pro každou prostou posloupnost $\{p_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující ke q.

TVRZENÍ 6 (Limita pomocí okolí). *Následující tvrzení jsou pro funkci f, hromadný bod q definičního oboru f a bod $r \in \mathbb{R}^*$ ekvivalentní:*

1. $\lim_{p \to q} f(p) = r$;
2. *Pro každé okolí U bodu r existuje okolí V bodu q takové, že $f(p) \in U$ jakmile $p \in V \cap \mathcal{D}(f), p \neq q$.*
3. *(Jsou-li q, r vlastní.) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(p) - r| < \varepsilon$ jakmile $p \in \mathcal{D}(f), 0 < |p - q| < \delta$.*

4.2 Vlastnosti

TVRZENÍ 7 (Vlastnosti limit). *1. Nechť $q \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě q právě když $\lim_{p \to q} f(p) = f(q)$.*

2. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

TVRZENÍ 8 (Aritmetické operace). *Nechť q je hromadný bod definičních oborů funkce $f + g$. Pak platí, pokud mají pravé strany smysl:*

1. $\lim(f(p) + g(p)) = \lim f(p) + \lim g(p)$;
2. $\lim(f(p) \cdot g(p)) = \lim f(p) \cdot \lim g(p)$;
3. $\lim \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{\lim f(p)}{\lim g(p)}$.

TVRZENÍ 9 (Limita složené funkce). *Mějme reálné funkce dvou proměnných f, g_1, g_2. Nechť q je hromadný bod definičního oboru funkcí $f \circ (g_1, g_2)$ a nechť $\lim_{p \to q} g_1(p) = a, \lim_{p \to q} g_2(p) = b$*

1. *Jestliže f je spojitá v bodě (a, b), pak*

$$\lim_{p \to q} (f \circ g)(p) = f(a, b)$$

2. *Jestliže jedna z limit a, b je nevlastní, pak*

$$\lim_{P \to C} (f \circ g)(p) = \lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y)\,,$$

pokud pravá strana existuje.

Podobně pro všechna další složení funkcí.

.

TVRZENÍ 10 (Limity a uspořádání na $\mathbb{R}$). *Mějme funkce f, g definované na množině A a q buď hromadný bod A.*

1. *Jestliže $\lim_{p \to q} f(p) < \lim_{p \to q} g(p)$, pak existuje okolí U bodu q takové, že $f(p) < g(p)$ pro všechna $p \in U \cap A, p \neq q$.*

2. *Jestliže existuje okolí U bodu q takové, že $f(p) \leq g(p)$ pro všechna $p \in U \cap A, p \neq q$, pak $\lim_{p \to q} f(p) \leq \lim_{p \to q} g(p)$ (pokud existují).*

TVRZENÍ 11 (Dva policajti). *Mějme funkce f, g, h definované na množině A, q buď hromadný bod A, U okolí q a pro $p \in A \cap U, p \neq q$ nechť $f(p) \leq g(p) \leq h(p)$. Pokud existují $\lim_{p \to q} f(p)$, $\lim_{p \to q} h(p)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim_{p \to q} g(p)$ a rovná se oběma zbývajícím.*

DŮSLEDEK 1. *Nechť $\lim_{p \to q} f(p) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu q. Pak $\lim_{p \to q} f(p)g(p) = 0$.*

5 Jiná popsání množin v rovině a prostoru

5.1 Implicitně zadané množiny

Nechť $A \subset \mathbb{R}^3$ a f je spojitá funkce na A. Rovnice

$$f(x, y, z) = 0\,,$$

popisuje *implicitně* množinu $P = \{(x, y, z) \in A; f(x, y, z) = 0\}$ v trojrozměrném prostoru.

Např. rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ popisuje povrch koule o poloměru a a středu v počátku.

5.2 Parametrické popsání množin

Nechť φ, ψ, τ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Rovnice

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad z = \tau(t) \quad \text{pro } t \in (a, b)$$

popisují *parametricky křivku* v trojrozměrném prostoru.

Nechť φ, ψ, τ jsou spojité funkce na polootevřené množině $A \subset \mathbb{R}^2$.

Rovnice

$$x = \varphi(u, v)\,, \quad y = \psi(u, v)\,, \quad z = \tau(u, v) \quad \text{pro } (u, v) \in A$$

popisují *parametricky plochu* v trojrozměrném prostoru.

Např. rovnice $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct, t \in (-\infty, +\infty)$
je přímka procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a mající směr vektoru (a, b, c).

Rovnice $x = x_0 + a_1 u + a_2 v, y = y_0 + b_1 u + b_2 v, z = z_0 + c_1 u + c_2 v$
pro $u, v \in (-\infty, +\infty)$, je rovina procházející bodem (x_0, y_0, z_0), rovnoběžná s vektory $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$.

5.3 Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic

Cylindrické (válcové) souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z), kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\ (+\pi), z = z$$

$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = z\,.$$

Množina je popsána cylindrickými souřadnicemi zadáním funkce $z(r, \alpha)$ (nebo $r(\alpha, z)$).

Např. kužel s vrcholem v počátku je dán rovnicí $r = z$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), z \in [0, 1]$.

5.4 Popsání množiny pomocí sférických souřadnic

Sférické souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, β), kde

$$x = r \cos\beta \cos\alpha, y = r \cos\beta \sin\alpha, z = r \sin\beta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}(+\pi)\ (\pm\pi/2), \beta = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ (\pm\pi/2)\,.$$

Množina je popsána sférickými souřadnicemi je-li zadána funkce $r(\alpha, \beta)$.

Např. koule o poloměru R a středu v počátku je zadána rovnicí $r = R$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$.