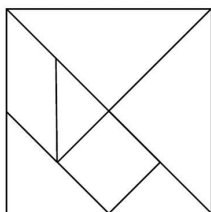


Prostorová představivost – tangram, stavby z hracích kostek

Petr Mentlík

Otevřeme-li učebnici stereometrie pro střední školy, dozvíme se hned v předmluvě, že tato oblast je považována za jednu z nejobtížnějších částí školské matematiky. Autorka jedním dechem dodává, že základní problém vidí v nedostatku prostorové představivosti [4]. My bychom však neměli zůstat u pouhého konstatování špatného stavu, ale především usilovat o jeho zlepšení. Neukládá nám to jen naše matematické svědomí, ale rovněž základní vzdělávací dokumenty, tedy rámcově vzdělávací programy (dále RVP). Například RVP pro základní školu uvádí v očekávaných výstupech, že žák „řeší úlohy na prostorovou představivost“. Tento očekávaný výstup je zařazen v oblasti ne-standardních a aplikačních úloh, které by se měly podle stejného dokumentu prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání [5]. Pokud to tedy shrneme, rozvoj prostorové představivosti je na bedrech matematiky a to průběžně, napříč jednotlivými tématy. Dobře tedy. Pokud se mi jako učiteli podaří v nabitém programu získat chvilku pro prostorovou představivost, co bych měl s žáky dělat? Možností a aktivit existuje mnoho. Cílem tohoto článku je nabídnout čtenáři dvě prostředí, ve kterých mohou žáci zdokonalovat své schopnosti. Obě patří do skupiny manipulativních činností, kdy žáci pracují s reálně existujícími modely. Význam taktilní zkušenosti vyzdvihují i čeští autoři zabývající se touto problematikou, například v publikacích [2] či [3]. Prvním prostředím je z oblasti rovinné geometrie a tvoří jej práce s tangramem.

1 Tangram



Jedná se o dvojrozměrný skládací hlavolam. Je tvořen celkem sedmi částmi. Jedním čtvercem, jedním kosodélníkem a celkem pěti trojúhelníky. A to dvěma malými, jedním středně velkým a dvěma velkými. Všechny tyto části se dají seskládat do čtverce, respektive z něj vznikly. Oříšek hlavolamu spočívá v sestavení určitého tvaru.

Jako u většiny starých hlavolamů je i historie tangramu zahalena tajemstvím. Sam Loyd napsal v roce 1903 ve své knize Osmá kniha tanů, že hlavolam byl

stvořen bohem jménem Tan již před asi čtyřmi tisíci lety. Vše působilo velmi přesvědčivě, nicméně jak se později ukázalo, jednalo se o zcela fiktivní historii. Pravděpodobně tangram vznikl ze starších hlavolamů a úloh na přelomu 18. a 19. století (první kniha tanů, tedy zadání jednotlivých úloh, je datována do roku 1813). Díky obchodníkům se hlavolam pár let po svém vzniku rozšířil do Ameriky a Evropy. Zde si ho oblíbil například císař Napoleon, který jej s radostí používal na vyčištění hlavy ve vyhnanství na ostrově Sv. Heleny [6]. Někteří autoři připojili k tangramu pověst o jeho vzniku, snad aby dokázali jeho magický a starodávný původ. Proto dnes existuje mnoho příběhů, jak hlavolam vznikl. Zde je jedna z nich. Podle jedné pověsti jistý čínský císař požádal, aby pro něj zhotovili rozměrnou skleněnou tabuli. Při dopravě do paláce se tabule s velmi jemnou strukturou rozbila. Všechny však velmi překvapila skutečnost, že se tabule neroztříštila na mnoho drobných kousků, ale na sedm geometrických útvarů s ideálními tvary. Když se je pokoušeli seskládat dohromady, ukázalo se, že to lze udělat mnoha různými způsoby. Když dorazili do paláce, předvedli císaři skleněnou tabuli sestavenou z dílů jako zvláštní druh hlavolamu. Císaři se tento dárek velmi zalíbil [1]. Nyní se již pojďme podívat na jednotlivé aktivity, které můžeme do hodin matematiky zařadit. Úlohy jsou inspirovány či převzaty z [1].

2 Výroba tangramu

Logicky první krok. Tangram je možné zakoupit, narýsovat či nakopírovat a následně vystříhnout. Volba je zcela na učiteli.

3 Poznáváme dílky tangramu

Než začneme skládat, pohrajeme si se sedmi útvary, které tvoří tangram. Toto „hraní“ je samozřejmě závislé na úrovni žáků.

- **Základní úroveň** – pojmenování tvarů, vztahy mezi nimi, shodnost úseček, měření úseček,
- **vyšší základoškolská úroveň** – pomocí měření určit obsahy a obvody jednotlivých útvarů,
- **středoškolská úroveň** - obecně vyjádřit velikost úseček, vypočítat obecně obsahy a obvody.

4 Začínáme skládat

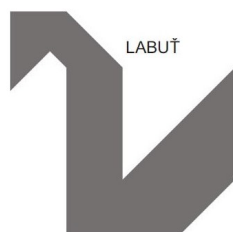
Předtím než začneme skládat, je třeba seznámit žáky s pravidly tangramu.

1. V každém obrazci musí být použito všech sedm částí skládačky,
2. žádná část se nesmí překrývat,
3. dílky mohou být použity i převráceně (položeny na opačnou stranu), což má vliv u kosodélníku.

Tato pravidla si žáci mohou vyzkoušet například na sestavení čtverce. To by měl být úkol jednoduchý, neboť čtverec viděli při výrobě tangramu či při poznávání jednotlivých dílků.

5 Stavíme dle siluety

Při této aktivitě žáci potřebují tangram, čtverečkovaný papír a především jednotlivé siluety. Ty zobrazují různé pojmenované tvary a žáci je pomocí tangramu vyplňují. Pokud přijdou na řešení, zaznamenají si jej pomocí čtverečkovaného papíru a mohou řešit další. Následně proběhne společná kontrola na tabuli.

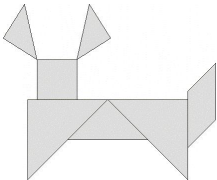


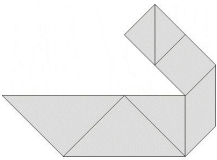
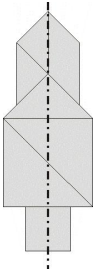
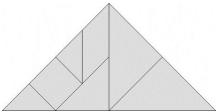
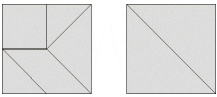
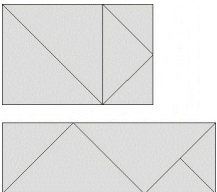
6 Stavíme dle tvaru v jiném měřítku

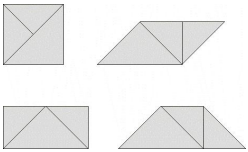
I při této aktivitě žáci staví zadaný tvar, ale nemohou na něj pokládat jednotlivé dílky. Vzor je v jiném měřítku či nemusí být žákům na dosah. Je například přilepen či zobrazen na tabuli. Jinak princip zůstává stejný. Žáci se snaží přijít na řešení, a pokud jsou úspěšní, zaznamenají jej na čtverečkový papír. Jedná se o aktivitu náročnější než předcházející, kdy již někteří žáci nemusí být při řešení úspěšní. Proto se vyplatí zadat žákům vždy dva tvary jeden jednoduchý a druhý složitější.

7 Stavíme bez předlohy

Při těchto aktivitách žáci nestaví dle předlohy, ale plní úkoly dle zadání a následně je zakreslí na papír.

Zadání	Řešení či možné řešení
a) Postav podle pravidel tangramu obrazec dle své fantazie, pojmenuj ho a zakresli na čtverečkový papír.	 Jelen

Zadání	Řešení či možné řešení
b) postav podle pravidel tangramu obrazec dle své fantazie, pojmenuj ho a zakresli na čtverečkovaný papír. Ale pozor, k sobě dávej dílky pouze shodnou stranou.	 Žehlička
c) Podle pravidel tangramu postav libovolný osově souměrný tvar. Zakresli jej na čtverečkovaný papír a do náčrtku vyznač osu souměrnosti.	 Raketa
d) Postav podle pravidel tangramu trojúhelník a zakresli ho na čtverečkovaný papír. O jaký se jedná trojúhelník?	
e) Ze všech dílků tangramu slož dva shodné čtverce. Zakresli jej na čtverečkovaný papír.	
f) Ze dvou největších, středního a dvou nejmenších trojúhelníků postav dva obdélníky s různými obvodů (z výše zmíněných pěti částí tangramu postav první obdélník, zakresli ho a ze stejných pěti dílků postav druhý obdélník a zakresli ho). Mají stejný obsah?	

Zadání	Řešení či možné řešení
g) Z jednoho středního a dvou nejmenších trojúhelníků postav čtverec, obdélník, lichoběžník a kosodélník. Mají některé z nich stejný obvod?	

8 Skautský obchod

Na skautském táboře používali jako platidlo jednotlivé dílky tangramu – takzvané Tangiše se zkratkou Tg. Hodnotu jednotlivých dílků udával jejich obsah.

- Jaké hodnoty měli jednotlivé dílky, když nejmenší trojúhelník měl hodnotu jeden Tangiš (1 Tg)?
- Jakou maximální hodnotu lze zaplatit jedním celým tangramem?
- Kolika způsoby lze zaplatit částku 4 Tg?

9 Stavby z hracích kostek

Druhým prostředím jsou stavby z hracích kostek. Hrací kostky jsou dětem důvěrně známé, avšak jejich potenciál nedokážeme ve škole dostatečně využít. Používají se snad při výuce pravděpodobnosti, ale k rozvoji prostorové představivosti nikoliv. Úlohy s nimi se vyskytují až při testování žáků, například v Matematickém klokanovi. Přičemž nakoupit jich určité množství a využít je při hodinách není ani tolik nákladné. Jednotlivé aktivity lze provádět i ve dvojicích či v početnějších skupinách. V následujících úlohách (pokud není napsáno jinak) pracují žáci se šesti kostkami a mají k dispozici čtverečkovaný papír (ideálně centimetrový, v případě půlcentimetrového doporučuji měřítko: jedna stěna kostky = čtyři čtverečky).

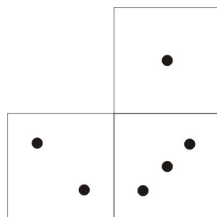
9.1 Volné stavění, stavění dle pater

- Postav z kostek libovolnou stavbu. Zakresli pohled shora na takovou stavbu.
- Postav libovolnou stavbu, která má čtyři patra.

9.2 Stavění dle obrázku

Zadáváme žákům podmínku, jak musí vypadat stavba například zepředu či shora. Takovou podmínku je velice jednoduché zadat náčrtem na tabuli. Tím můžeme regulovat obtížnost podle úrovně třídy.

- Postav stavbu, která při pohledu shora vypadá takto (obr. vpravo):
- Kolik může mít tato stavba nejvíce pater? Postav takovou stavbu.
- Kolik může mít tato stavba pater nejméně? Postav takovou stavbu.
- Kolik pater by mohla mít stavba nejvíce, kdyby se nejednalo o pohled shora, ale zprava? Postav takovou stavbu.



9.3 Stavby podle součtu

Využijeme toho, že jednotlivé stěny jsou očíslované. Můžeme pak zadávat opět dle úrovně třídy následující úlohy.

- Postav stavbu, aby při pohledu shora byl součet viděných ok patnáct.
- Postav stavbu, aby při pohledu shora byl součet viděných ok patnáct a počet pater maximální.
- Postav stavbu, aby při pohledu shora byl součet viděných ok osm a při pohledu zepředu čtrnáct.
- Postav stavbu, aby byl součet viděných ok při pohledu shora maximální?
- Postav stavbu, aby součet viděných ok při pohledu shora minimální? Tyto dvě úlohy je vhodné zadávat v uvedeném pořadí. Zpravidla se někteří žáci nachytají a postaví jednopatrovou stavbu se součtem 6. Ale správně je samozřejmě „komín“ s minimálním součtem jedna.

- f) Postav stavbu, aby součet viděných ok shora byl maximální a zepředu minimální?

9.4 Odvalování krychle

Odvalování hrací kostky je typickým příkladem činnosti, kterou používáme při testování, ale nikoliv k rozvoji schopností žáků. K této aktivitě stačí jedna hrací kostka a čtverečkový papír. Stanoví se startovací pozice a následuje diktát odvalování. Žáci odvalují krychli a na čtverečkový papír zapisují stopu, kterou „tisknou“ oka na spodní stěně.

- a) Nastav si krychli tak, abys při pohledu shora viděl šestku a zepředu pětku. Následuje diktát: odval krychli doprava, dozadu, dozadu, doleva. Po několika hrách je dobré zkusit odvalování bez použití kostky, pouze v mysli. Po zakreslení stopy můžeme použít hrací kostku ke kontrole.
- b) Načrtni si projekci krychle. Vyznač kolik ok je na které stěně, když při pohledu shora vidíš pětku a zprava jedničku. Následně na čtverečkový papír zakresli stopu, která vznikne odvalením: dvakrát doprava, dvakrát dozadu a jednou doleva.

10 Závěr

Dle mého názoru je prostorová představivost významnou schopností v lidském životě, jejíž význam bude s nastupující technologickou revolucí růst. Ve školství jí však (proti proudu) věnujeme čím dál menší pozornost. Učitelé výtvarné výchovy a dílen se technickému kreslení příliš nevěnují, pokud jej vůbec učí. V matematice dělá žákům čím dál větší obtíže zvládnout aritmetické operace či algebraické úpravy, a tak učitelé věnují mnoho času jejich trénování. Tento čas pak ale chybí na řešení nestandardních a aplikačních úloh, kam řadíme i úlohy na prostorovou představivost. V boji proti tomuto trendu jsem zde nabídl dvě prostředí, která může učitel v období jednoho či dvou měsíců zařazovat jako rozcvičky či relaxační chvílky, aniž by přicházel o významné části hodin.

Reference

- [1] BRINCKOVÁ, Jaroslava, Viera UHERČÍKOVÁ a Peter VANKÚŠ. *Ne-tradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike*. Bratislava: Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2013. ISBN 978-80-8147-019-6.
- [2] HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky*. 2. vydání. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3.
- [3] MOLNÁR, Josef. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004. ISBN 80-244-0927-5.
- [4] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-178-7.
- [5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online]. Praha: MŠMT, 2016. [cit. 2016-12-04].
Dostupné z: <http://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=75566&view=6433>.
- [6] *Tangram: stručná historie. Hlavalamy.info* [online]. [cit. 2018-07-26].
Dostupné z: <https://mojehlavalamy.webnode.cz/news/tangram-strucna-historie1/>