9. Aplikace lineární algebry do analytické geometrie

V G_2 (G_3) Přímka procházející bodem X_0 a mající směr vektoru $\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$) má **parametrickou rovnici**

$$X = X_0 + t\boldsymbol{u}, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}$$

Příklad: Napište parametrickou rovnici přímky procházející bodem (3, -2) a mající směr vektoru $\boldsymbol{u} = (4, 5)$.

$$(x, y) = (3, -2) + t(4, 5) \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}$$

Tzn. $x = 3 + 4t$

$y = -2 + 5t$

Odtud $t = \dfrac{x-3}{4}$ a $t = \dfrac{y+2}{5}$

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{5} \qquad 5x - 4y - 23 = 0 \quad \text{obecná rovnice}$$

Nechť ***u*** a ***v*** jsou vektory z R^3, které jsou lineárně nezávislé (nejsou rovnoběžné). Rovina procházející bodem X_0 a rovnoběžná s vektory ***u*** a ***v*** má **parametrickou rovnici**

$$X = X_0 + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \quad , \quad \text{kde } s,t \in R$$

Příklad: Napište **parametrickou rovnici** roviny, která prochází bodem (5, 1, 6) a je rovnoběžná s vektory ***u*** = (2, 1, -3) a ***v*** = (1, 3, 2).

Parametrická rovnice:

$$X = (5, 1, 6) + t(2, 1, -3) + s(1, 3, 2), \text{ kde } s,t \in R$$

Vektorový součin vektorů v R^3.

Nechť $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. **Vektorovým součinem** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je vektor

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Příklad: Nechť $\boldsymbol{u} = (1, -1, 3)$ a $\boldsymbol{v} = (0, 4, 2)$. Spočítejme vektorový součin vektorů u a v.

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (-14, -2, 4)$$

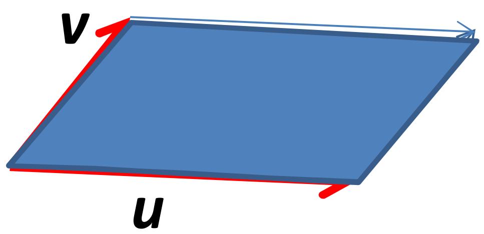
Mnemotechnická pomůcka: $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Vlastnosti vektorového součinu $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$, $r \in R$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$	anti – komutativnost
$\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}.(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0$	ortogonálnost $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ k $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$	levý distribiutivní zákon
$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u})$	pravý distributivní zákon
$\boldsymbol{u} \times (r\boldsymbol{v}) = (r\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = r(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$	násobení skalárem

Délka vektoru $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, tzn. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ = obsah rovnoběžníka (viz obr.)



Vektor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je **ortogonální** k vektorům $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Směr vektoru $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je určen pravidlem pravé ruky.

Problém: Určete rovnici roviny procházející body P(1, 3, -2), Q(1, 1, 5) a R(2, -2, 3).

Řešení:

Vektory $\overrightarrow{PQ} = (0, -2, 7)$ a $\overrightarrow{PR} = (1, -5, 5)$ jsou rovnoběžné s hledanou rovinou

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} = 25i + 7j + 2k = (25, 7, 2)$$

Vektor (25, 7, 2) je ortogonální s vektory $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PR}$. Je tedy ortogonální k zadané rovině. Je to proto *normálový vektor* zadané roviny

$$25x + 7y + 2z = k$$

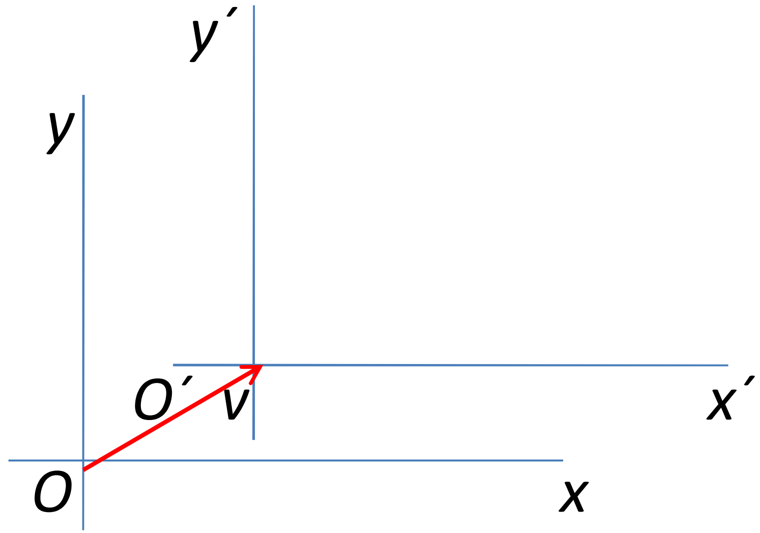
Protože rovina prochází bodem P, spočítáme *k*.

$$25.1 + 7.3 + 2(-2) = 42$$

Rovnice roviny: $25x + 7y + 2z = 42$

Posunutí kartézské soustavy souřadnic

Je dána kartézská soustava souřadnic O*xy.* Posuneme jí o vektor ***v***. Dostaneme novou soustavu souřadnic O´*x*´*y*´



Každý vektor ***u*** má v nové soustavě souřadnic stejné souřadnice jako v soustavě původní.

Jestliže pro vektor ***v*** platí ***v*** = (v1, v2), pak pro souřadnice bodu X(x, y) platí

$$x = x' + \mathbf{v}_1$$

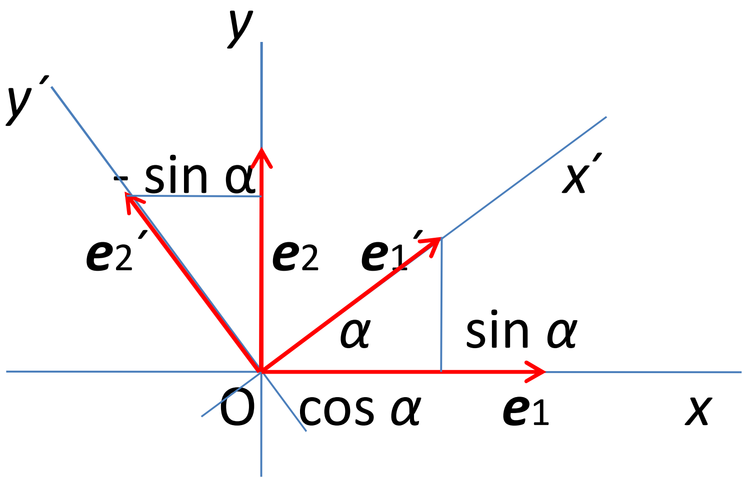
$$y = y' + \mathbf{v}_2$$

Otočení kartézské soustavy souřadnic

V původní soustavě Oxy označme $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$. Potom pro bod X = ($x$, y) platí

$$X = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = (x, y)$$

Soustavu Oxy otočíme kolem O o úhel α (viz obr.) a dostaneme soustavu O$x'y'$.



Potom $\boldsymbol{e}_1' = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ a $\boldsymbol{e}_2' = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Pro bod X v nových souřadnicích x', y' *platí*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ (viz Lineární zobrazení)