UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

KMA/P506 Pravděpodobnost a statistika
KMA/P507 Statistika na PC

Přednáška 06

jiri.cihlar@ujep.cz

Náhodný výběr
z normálního rozdělení

Základní věty

Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \approx No(\mu;\sigma^2)$

je náhodný výběr z normálního rozdělení.

Pak $$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \approx No\,(0\,;1)$$

$$Y = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \approx \chi^2(n-1)$$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n} \approx t(n-1)$$

Intervaly spolehlivosti

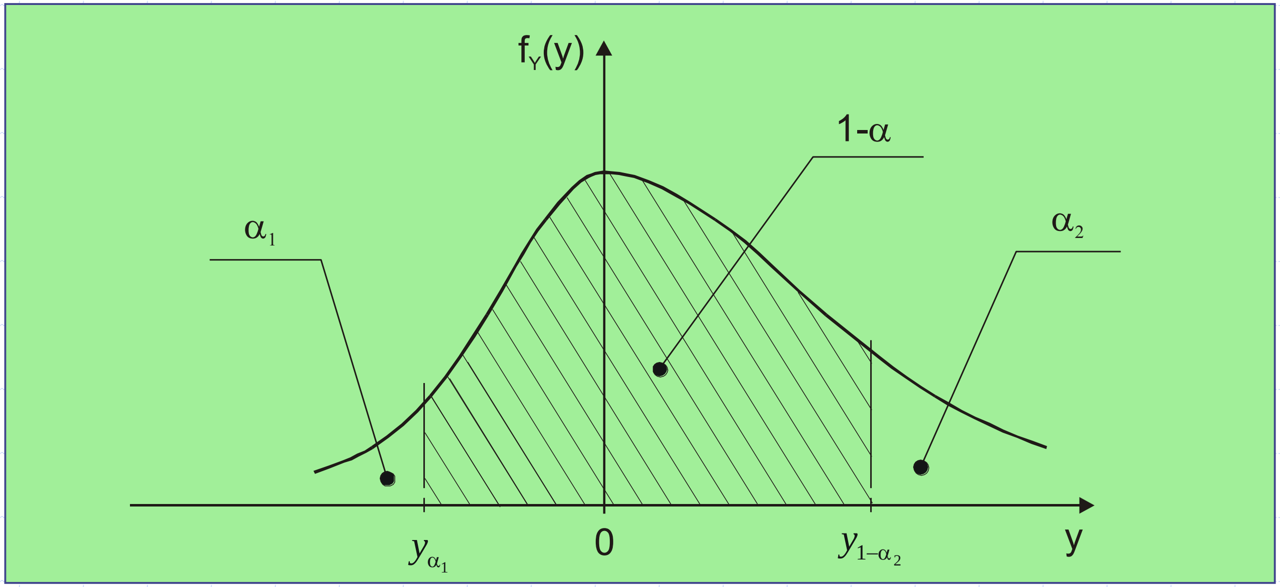
Definice intervalu spolehlivosti

Interval (G_1, G_2) budeme nazývat $100 \cdot (1-\alpha)$ procentním intervalem spolehlivosti pro parametr Θ právě tehdy, když platí

$$P(G_1 < \Theta < G_2) = 1 - \alpha \quad .$$

Postup konstrukce IS pro parametr θ

- Je třeba nalézt statistiku $Y(\Theta)$, která obsahuje odhadovaný parametr a má známé rozdělení pravděpodobnosti (známe její kvantily).



Pak využijeme:

$$P(y_{\alpha_1} < Y(\Theta) < y_{1-\alpha_2}) = 1 - \alpha$$

Simulace - vybery z normalniho rozdeleni.xlsx

IS pro parametry normálního rozdělení

Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \approx No(\mu; \sigma^2)$

je náhodný výběr z normálního rozdělení.

Pak intervaly spolehlivosti pro jeho parametry mají tvar:

$$\left(\bar{X} - t_{1-\alpha_2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_{1-\alpha_1}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha_2}(n-1)} ; \frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha_1}(n-1)} \right) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

IS pro parametr alternativního rozdělení

Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \approx A(p)$

je náhodný výběr z alternativního rozdělení.

Pak přibližný interval spolehlivosti pro jeho parametr ***p*** má pro velká ***n*** tvar:

$$\left(\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}\cdot(1-\bar{X})}{n}}\ ;\ \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}\cdot(1-\bar{X})}{n}} \right)$$

Nezávislé náhodné výběry ze dvou normálních rozdělení

Základní věta o rozptylech

Nechť $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \approx No(\mu_1; \sigma_1^{\ 2})$

$(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \approx No(\mu_2; \sigma_2^{\ 2})$

jsou nezávislé náhodné výběry ze dvou normálních rozdělení.

Pak

$$F = \frac{S_1^{\ 2} \cdot \sigma_2^{\ 2}}{S_2^{\ 2} \cdot \sigma_1^{\ 2}} \approx F(n_1 - 1; n_2 - 1)$$

Věta se používá zejména k testování hypotézy, že rozptyly obou rozdělení jsou stejné (F-test).

Pomocné věty

Nechť $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \approx No(\mu_1; \sigma_1^{\,2})$

$(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \approx No(\mu_2; \sigma_2^{\,2})$

jsou nezávislé.

Pak
$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}} \approx No\,(0\,;1)$$

$$\frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}} + \frac{(n_2 - 1)\cdot S_2^{\,2}}{\sigma_2^{\,2}} \approx \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$$

„Přesná“ věta o středních hodnotách

Nechť $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}) \approx No(\mu_1; \sigma_1^2)$

$(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}) \approx No(\mu_2; \sigma_2^2)$

jsou nezávislé. Nechť $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Pak

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \approx t\,(n_1 + n_2 - 2)$$

„Přibližná“ věta o středních hodnotách

Nechť $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}) \approx No(\mu_1; \sigma_1^2)$

$(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}) \approx No(\mu_2; \sigma_2^2)$

jsou nezávislé. Pak

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(k)$$

kde

$$k = \frac{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \cdot \left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \cdot \left(\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Děkuji za pozornost