1 Integrál a jeho vlastnosti

1.1 Integrál na intervalu

DEFINICE 1 (Integrál na intervalu)**.** Nechť je dána funkce $f(x,y)$ definovaná na intervalu $I=(a,b)\times(c,d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx}\,,\ \int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

pokud mají pravé strany smysl.

Pokud je $\int_A f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$ vlastní číslo, říkáme, že $\int_A f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$ *konverguje* nebo že funkce f je na A *integrovatelná*.

Pokud je $\int_A |f(x,y)|\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$ vlastní číslo a $\int_A f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$ má smysl, říkáme, že $\int_A f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$ *absolutně konverguje* nebo že funkce f je na A *absolutně integrovatelná*.

Intervaly se nepřekrývají, jestliže jejich průnik neobsahuje žádný interval.

1.2 Vlastnosti

TVRZENÍ 1 (Vlastnosti integrace na intervalu L v rovině)**.**

1. *Integrál na I je lineární, tj.*

$$\int_I(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_I f+\beta\int_I g\,,\ \textit{má-li pravá strana smysl.}$$

2. *Nechť I je sjednocením nepřekrývajících se intervalů $J_1,\dots,J_n$ a f je funkce definovaná na I. Potom*

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \sum_{i=1}^{n}\int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\,, \textit{má-li jedna strana smysl.}$$

3. *Jsou-li g,h funkce definované na I a $h\le g$ na I pak*

$$\int_I h \le \int_I g\,,\ \textit{mají-li obě strany smysl.}$$

4. *Je-li $f(x,y)=g(x)h(y)$ na $J\times K$, pak*

$$\int_{J\times K} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_J g(x)\ \mathrm{d}x\int_K h(y)\ \mathrm{d}y\,,$$

má-li pravá strana smysl. V tomto případě tedy integrace nezávisí na pořadí integrování.

1.3 Existence

TVRZENÍ 2 (Spojité funkce)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu I.*

- *Je-li $f\ge 0$, integrál $\int_I f$ existuje.*
- *Je-li f spojitá a omezená a I je omezený interval, integrál $\int_I f$ konverguje.*
- *Je-li f $0\le f\le g$ na I a $\int_I g$ konverguje, pak i $\int_I f$ konverguje.*

1.4 Geometrický přístup

TVRZENÍ 3 (Věta o střední hodnotě)**.** *Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I=[a,b]\times[c,d]$, pak existuje bod (p,q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p,q)(d-c)(b-a)$.*

TVRZENÍ 4 (Riemannův integrál)**.** *Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $I=[a,b]\times[c,d]$ a pro každé $n\in\mathbb{N}$ jsou zvolena rozdělení $a=x_0<x_{1,n}<\dots<x_{k_n,n}=b$ intervalu $[a,b]$ a $c=y_0<y_{1,n}<\dots<y_{l_n,n}=d$ intervalu $[c,d]$ taková, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.*

Pak pro libovolně zvolená čísla $p_{i,n}\in[x_{i-1,n},x_{i,n}]$, $q_{j,n}\in[y_{j-1,n},y_{j,n}]$ je

$$\lim_n \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} f(p_{i,n},q_{j,n})(x_{i,n}-x_{i-1,n})(y_{j,n}-y_{j-1,n}) = \int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

1.5 Změna pořadí integrace pro kompaktní interval

TVRZENÍ 5. *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na kompaktním intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$. Potom*

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy}\,.$$

1.6 Integrál na obecnějších množinách

Základní definice se omezí na množiny mezi grafy dvou funkcí.

DEFINICE 2 (Integrál na obecnějších množinách)**.** Nechť $\varphi \le \psi$ jsou funkce na (a,b) a f je funkce definovaná na množině $G = \{(x,y); x \in (a,b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností (existuje-li pravá strana).

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

Jestliže $\int_G f$ je konečný, říká se, že $\int_G f$ *konverguje*, nebo f je *integrovatelná*.

Jestliže $\int_G |f|$ je konečný a $\int_G f$ existuje, říká se, že $\int_G f$ *absolutně konverguje*, nebo f je *absolutně integrovatelná*.

V definici lze množinu G beze změny výsledku zvětšit o část nebo celou hranici. Funkce φ (resp.ψ) může nabývat hodnoty $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Za předpokladu absolutní integrovatelnosti se věta o změně pořadí integrace přenese z intervalů na obecnější množiny pomocí následujícího vyjádření integrálu součtem integrálů na intervalech.

TVRZENÍ 6 (Rozdělení množiny na intervaly)**.** *Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.*

TVRZENÍ 7 (Integrace pomocí intervalů)**.** *Nechť f je absolutně integrovatelná funkce na G. Potom pro rozdělení G na intervaly $\{J_n\}$ platí*

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

TVRZENÍ 8 (Věta o změně pořadí integrace)**.** *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá a absolutně integrovatelná na množině G ležící mezi grafy spojitých funkcí $\varphi(x), \psi(x)$ na intervalu (a,b). Nechť existují spojité funkce $\tau(y) \le \eta(y)$ na intervalu (c,d) tak, že $G = \{(x,y); y \in (c,d), \tau(y) < x < \eta(y)\}$. Potom (jakmile má jedna strana smysl).*

$$\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \int_c^d \Big(\int_{\tau(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

2 Substituce

TVRZENÍ 9 (Regulární zobrazení)**.** *Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:*

1. *Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.*
2. *Determinant*
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. *Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.*

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Zobrazení mající tři vlastnostmi z předchozí věty se nazývá regulární zobrazení.

Uvedený determinant se značí $J(\varphi, \psi)$ a nazývá Jacobiho determinant nebo stručněji Jacobián.

TVRZENÍ 10 (Substituční věta)**.** *Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom, jestliže má jedna strana smysl (H je obraz G)*

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$

3 Trojrozměrný integrál

DEFINICE 3 (Trojrozměrný integrál)**.** Trojrozměrný integrál funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subset \mathbb{R}^3$ je „hezká" množina, je sled jednorozměrného a dvojrozměrného integrálu (a tedy tří jednorozměrných integrálů):

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\int_{H_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde (a,b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H_p je průnik množiny G s rovinou kolmou na osu x v bodě p.

Pro použití předchozí části je třeba požadovat, aby H_x byly určeny grafy dvou funkcí (nebo konečné sjednocení takových nepřekrývajících se množin) a projekce G do osy x byl interval (nebo konečné sjednocení intervalů).

Věta o rozdělení otevřených množin na intervaly je stejná a stejný je i integrálu pomocí součtu integrálů přes nějaké rozdělení na intervaly.

Věta o změně pořadí integrace platí i pro trojrozměrné integrály. Říká, že *trojrozměrný integrál spojité absolutně integrovatelné funkce lze počítat v jakémkoli pořadí souřadnic*. Možností těchto pořadí je šest.

Tvrzení o záměně souřadnic se také změní jen formálně.

Nejdříve se zadefinuje *regulární zobrazení* prostoru do sebe:

Regulární zobrazení v prostoru
Na otevřené množině G jsou definovány funkce $u = \varphi(x,y,z), v = \psi(x,y,z), w = \tau/x,y,z)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce φ, ψ, τ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

Pak se zobrazení Φ nazývá regulární a zobrazuje G na otevřenou množinu. Uvedený determinant je Jacobiho determinant nebo Jacobián a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

TVRZENÍ 11 (Věta o substituci)**.** *Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)*

$$\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_G f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w))|J(\varphi,\psi,\tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.