Kapitola 3 - Vektorové prostory konečné dimenze

3.1. Dimenze vektorového prostoru

3.1.1. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. V se nazývá vektorový prostor konečné dimenze, existuje-li $M \subseteq V$, M je konečná, $\langle M \rangle = V$.

3.1.2. PŘÍKLAD

(I) Buď P_n množina všech polynomů stupně nejvýše n nad tělesem reálných čísel ($n \in \mathbb{N}$). P_n lze považovat za vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, je-li sčítání polynomů definováno obvyklým zpusobem $(a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n) + (b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_n \cdot x^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x + \cdots + (a_n + b_n) \cdot x^n$. a je-li též obvyklým způsobem definováno násobení polynomu reálným číslem $c \cdot (a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n) = (c \cdot a_0) + (c \cdot a_1) \cdot x + \cdots + (c \cdot a_n) \cdot x^n$. Vektorový prostor P_n má konečnou dimenzi, neboť například $\langle \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \rangle = P_n$.

(II) Buď P množina všech polynomů nad tělesem reálných čísel. Obdobně jak v části (I), P lze považovat za vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Ukážeme, že P nemá konečnou dimenzi. Předpokládejme opak. Nechť $p_1, \ldots, p_k \in P$, $\langle \{p_1, \ldots, p_k\} \rangle = P$. Uvažme polynom $p = c_1 \cdot p_1 + \cdots + c_k \cdot p_k$, kde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Pokud polynom p je nenulový, je stupeň $p \le max\{\text{stupeň } p_1, \ldots, \text{stupeň } p_k\} = m$. Uvažujme polynom $x^{m+1} \in P$. Vidíme, že $x^{m+1} \notin \langle \{p_1, \ldots, p_k\} \rangle$, neboť stupeň $x^{m+1} = m+1 > m$. Dostali jsme spor. Takže vskutku P nemá konečnou dimenzi.

3.1.3. TVRZENÍ

(a) Z každé konečné množiny generátorů vektorového prostoru lze vybrat bázi.
(b) Každá báze prostoru konečné dimenze je konečná.
(c) Podprostor vektorového prostoru konečné dimenze je opět konečně dimenzionální.
Důkaz:
(a) Nechť $M \subseteq V$, M je konečná, $\langle M \rangle = V$. Uvažme následující systém množin S: $S = \{A \subseteq M \mid \langle A \rangle = V\}$.
Protože $M \in S$, je $S \neq \emptyset$. Množina S je konečná ($|S| \le 2^{|M|}$). Nechť $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Lze předpokládat, že $|A_1| \le |A_2| \le \cdots \le |A_k|$. Stačí ukázat, že A_1 je minimální (vzhledem k inkluzi) podmnožina ve V splňující $\langle A_1 \rangle = V$ Dle 2.4.3. z toho vyplyne, že A_1 je báze a stačí si připomenout, že $A_1 \subseteq M$. Nechť tedy $B \subseteq A_1$, $\langle B \rangle = V$. Chceme: $B = A_1$. Stačí ukázat, že $|B| = |A_1|$. Nerovnost $|B| \le |A_1|$ je jasná. Protože $B \subseteq A_1$, a $A_1 \subseteq M$, je $B \subseteq M$; také $\langle B \rangle = V$, takže $B \in S$, $B = A_i$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Tudíž $|A_1| \le |A_i| = |B|$.
(b) Postupujeme sporem. Nechť B je báze, B je nekonečná. Nechť V je prostor konečné dimenze, $V = \langle \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_l}\} \rangle$. Nechť $A \subseteq B$, $|A| = l+1$, $A = \{\vec{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{l+1}}\}$. Protože množina B je lineárně nezávislá, je též lineárně nezávislá její konečná podmnožina A . Jsou tedy vektory $a_1, \ldots a_{l+1}$ lineárně nezávislé. Dle Steinitzovy věty o výměně (2.5.1.) je $l+1 \le l$, $1 \le 0$, spor.
(c) Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, nechť W je podprostor ve V. Buď B báze podprostoru W (ta existuje dle 2.4.4. (a)). Stačí ukázat, že B je konečná. Předpokládejme opak. Uvědomme si, že B je lineárně nezávislá množina ve V a aplikujeme 2.4.4.(b): existuje báze C prostoru V taková, že $B \subseteq C$. Množina C je nekonečná, protože množina B je nekonečná. Tedy V má nějakou nekonečnou bázi. To je ve sporu s již dokázanou částí (b).

3.1.4. VĚTA

Každé dvě báze vektorového prostoru konečné dimenze mají stejný počet vektorů.

Důkaz: Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, nechť B_1, B_2 jsou báze prostoru V.
Rozlišme tři případy:
(I) $B_1 = \emptyset$
(II) $B_2 = \emptyset$
(III) $B_1 \neq \emptyset$ a $B_2 \neq \emptyset$
ad (I): $\langle B_1 \rangle = \langle \emptyset \rangle = V$; ovšem $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$, takže $V = \{\vec{0}\}$. Pak nutně $B_2 = \emptyset$ a jsme hotovi.

ad (II): Tento případ je podobný případu (I).
ad (III): Nechť $B_1 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$, $B_2 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_l\}$. Vektory $u_1, \ldots, u_k$ jsou lineárně nezávislé a $\langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_l\} \rangle = V$. Dle Steinitzovy věty o výměně (2.5.1.) je $k \leq l$. Naopak, vektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_l$ jsou lineárně nezávislé a $\langle \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\} \rangle = V$. Dle Steinitzovy věty o výměně je $l \leq k$. Celkem: $k = l$.

Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze. Uvědomme si tato fakta:
(I) V má bázi (viz 2.4.4.)
(II) Všechny báze prostoru V jsou konečné (viz 3.1.3.(b)).
(III) Všechny báze prostoru V mají stejný počet vektorů (viz 3.1.4.)
Má tedy smysl následující definice:

3.1.5. DEFINICE

Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze. Dimenze vektorového prostoru V (označení: $dim\,V$) je počet vektorů v kterékoli bázi prostoru V.

3.2. **Věty o dimenzi**

3.2.1. VĚTA

Nechť V_1, V_2 jsou vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem T.
Platí:
V_1, V_2 jsou izomorfní ($V_1 \simeq V_2$) právě tehdy, když $dim\,V_1 = dim\,V_2$.
Důkaz:
$\Rightarrow$: Buď $\varphi : V_1 \to V_2$ izomorfismus. Rozlišíme dva případy:
(I) V_1 je triviální
(II) V_1 není triviální
ad (I): Také V_2 je triviální a $0 = dim\,V_1 = dim\,V_2$.
ad (II): Buď $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ báze prostoru V_1. Nechť $C = \{\varphi(\vec{b}_1), \ldots, \varphi(\vec{b}_n)\}$. Protože φ je injekce, $|C| = n = |B|$. Stačí tedy ukázat, že C je báze prostoru V_2.
C je lineárně nezávislá:
Nechť $d_1, \ldots, d_n \in T$, $d_1 \cdot \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + d_n \cdot \varphi(\vec{b}_n) = \vec{0}$.
Chceme: $d_1 = \cdots = d_n = 0$.
Počítejme: $\varphi(d_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + d_n \cdot \vec{b}_n) = \varphi(d_1 \cdot \vec{b}_1) + \cdots + \varphi(d_n \cdot \vec{b}_n) = d_1 \cdot \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + d_n \cdot \varphi(\vec{b}_n) = \vec{0}$.
Jelikož také $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ a φ je injekce, nutně $d_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + d_n \cdot \vec{b}_n = \vec{0}$. Protože vektory $\vec{b}_1, \ldots, b_n$ jsou lineárně nezávislé, máme $d_1 = \cdots = d_n = 0$.
$\langle C \rangle = V_2$:
Nechť $\vec{v} \in V_2$. Chceme: $\vec{v} \in \langle C \rangle$.
Protože φ je surjekce, existuje $\vec{u} \in V_1$ tak, že $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$. Protože $\langle B \rangle = V_1$, existují $d_1, \ldots, d_n \in T$ tak, že $d_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + d_n \cdot \vec{b}_n = \vec{u}$. Pak
$\vec{v} = \varphi(\vec{u}) = \varphi(d_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + d_n \cdot \vec{b}_n) = d_1 \cdot \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + d_n \cdot \varphi(\vec{b}_n)$ a $\vec{v} \in \langle C \rangle$.

$\Leftarrow$: Nechť $dim\, V_1 = dim\, V_2 = n$. Rozlišme dva případy:
(I) $n=0$ (II) $n>0$
ad (I): $V_1 = \{\vec{0}\}$, $V_2 = \{\vec{0}\}$, takže zřejmě V_1 a V_2 jsou izomorfní.
ad (II): Dle 2.8.3. V_1 a V_2 jsou izomorfní s T^n . Pak V_1 je izomorfní s V_2 .

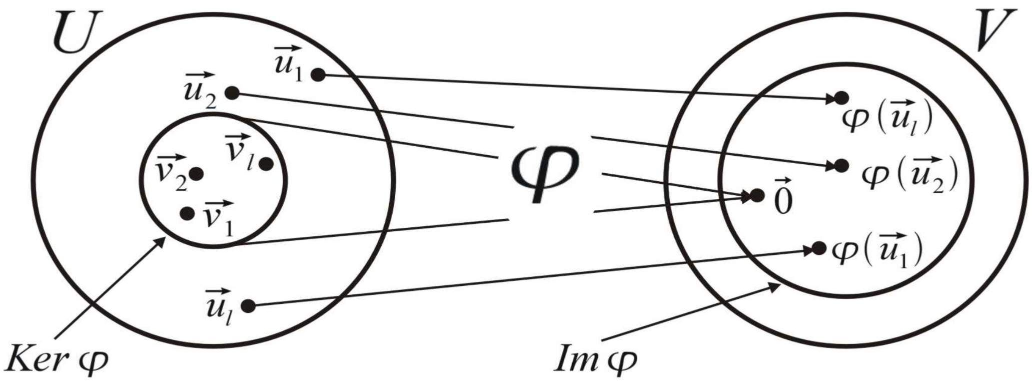
3.2.2. VĚTA

Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T , W_1 a W_2 jsou podprostory ve V . Platí: $dim\, W_1 + dim\, W_2 = dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2)$.
Důkaz: Nejdříve rozlišme dva případy:
(I) $W_1 \cap W_2$ je triviální (II) $W_1 \cap W_2$ není triviální
ad (I): Nyní rozlišme tři případy:
(a) W_1 je triviální
(b) W_2 je triviální
(c) W_1 není triviální, W_2 není triviální
ad (a): $W_1 + W_2 = \{\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} \in W_1,\ \vec{y} \in W_2\} = \{\vec{0} + \vec{y} | \vec{y} \in W_2\} = \{\vec{y} | \vec{y} \in W_2\} = W_2$
Tedy: $dim\, W_1 + dim\, W_2 = 0 + dim\, W_2 = dim\, W_2$,
$dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2) = 0 + dim\, W_2 = dim\, W_2$
ad (b): Postupujeme obdobně jak v případě (a).
ad (c): Nechť $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ je báze podprostoru W_1 , nechť $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}$ je báze podprostoru W_2 . Ukážeme, že $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}$ je báze podprostoru $W_1 + W_2$. Zřejmě $\langle\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}\rangle = W_1 + W_2$. Nechť $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in T$,
$c_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots c_k \cdot \vec{u}_k + d_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + d_l \cdot \vec{v}_l = \vec{0}$. Pak $c_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots c_k \cdot \vec{u}_k = (-d_1) \cdot \vec{v}_1 + \cdots + (-d_l) \cdot \vec{v}_l \in W_1 \cap W_2$.
Jelikož $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, máme $c_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots c_k \cdot \vec{u}_k = \vec{0} = d_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + d_l \cdot \vec{v}_l$. Protože vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Protože vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ jsou lineárně závislé, $d_1 = \cdots = d_l = 0$. Ukázali jsme, že vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ jsou lineárně nezávislé. Tím je ukončen důkaz faktu, že $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l\}$ je báze podprostoru $W_1 + W_2$. Nyní počítejme: $dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2) = 0 + (k+l) = dim\, W_1 + dim\, W_2$.
ad (II): Nyní opět rozlišíme tři případy:
(a) $W_1 \subseteq W_2$
(b) $W_2 \subseteq W_1$
(c) $W_1 \nsubseteq W_2$ a $W_2 \nsubseteq W_1$ (tj. $W_1 \cap W_2 \subset W_1$, $W_1 \cap W_2 \subset W_2$)
ad (a): $W_1 \cap W_2 = W_1$, $W_1 \cup W_2 = W_2$, takže
$dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2) = dim\, W_1 + dim\, W_2$.
ad (b): Postupujeme obdobně jak v případě (a).
ad (c): Buď $\{e_1, \dots, e_k\}$ báze podprostoru $W_1 \cap W_2$. Dle 2.4.4.(b) existují vektory $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p \in W_1$ ($p \in \mathbb{N}$) takové, že $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p\}$ je báze podprostoru W_1 . Obdobně existují vektory $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q \in W_2$ takové, že $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\}$ je báze podprostoru W_2 . Ukážeme, že $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\}$ je báze podprostoru $W_1 + W_2$. Zřejmě $\langle\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\}\rangle = W_1 + W_2$. Nechť $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q \in T$,
$a_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + a_k \cdot \vec{e}_k + b_1 \cdot \vec{f}_1 + \cdots + b_p \cdot \vec{f}_p + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \cdots + c_q \cdot \vec{g}_q = \vec{0}$.
Položme $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + a_k \cdot \vec{e}_k + b_1 \cdot \vec{f}_1 + \cdots + b_p \cdot \vec{f}_p$. Zřejmě $\vec{x} \in W_1$. Ovšem $\vec{x} = (-c_1) \cdot \vec{g}_1 + \cdots + (-c_q) \cdot \vec{g}_q$, takže také $\vec{x} \in W_2$. Zjistili jsme, že $\vec{x} \in W_1 \cap W_2$. Pak $\vec{x} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + d_k \cdot \vec{e}_k$ pro jistá $d_1, \dots, d_k \in T$. Potom
$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + d_k \cdot \vec{e}_k + c_1 \cdot \vec{g}_1 + \cdots + c_q \cdot \vec{g}_q$. Z lineární nezávislosti vektorů $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q$ dostáváme $d_1 = \cdots = d_k = c_1 = \cdots = c_q = 0$. Tudíž $\vec{x} = \vec{0}$. Lineární nezávislost vektorů $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p$ dává $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_p = 0$. Podařilo se nám

dokázat, že vektory $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q$ jsou lineárně nezávislé. Je tedy ukončen důkaz faktu, že $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q\}$ je báze podprostoru W_1+W_2.
Nyní $dim(W_1 \cap W_2)+dim(W_1+W_2)=k+(k+p+q)=(k+p)+(k+q)=dim\,W_1+dim\,W_2$.

3.2.3. VĚTA

Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T, nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, nechť $\varphi: U \rightarrow V$ je homomorfismus.
Platí: $dim(Im\,\varphi)+dim(Ker\,\varphi)=dim\,U$.
Důkaz: Rozlišme dva případy:
(I) $Ker\,\varphi$ je triviální
(II) $Ker\,\varphi$ není triviální
ad (I): Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in U$, $\varphi(\vec{x})=\varphi(\vec{y})$. Pak $\varphi(\vec{x}-\vec{y})=\varphi(\vec{x})-\varphi(\vec{y})=\vec{0}$, $\vec{x}-\vec{y} \in Ker\,\varphi=\{\vec{0}\}$, $\vec{x}-\vec{y}=\vec{0}$, $\vec{x}=\vec{y}$. Vidíme, že zobrazení φ je prosté. Takže $\varphi: U \rightarrow Im\,\varphi$ je izomorfismus.
Dle 3.2.1. $dim\,U=dim(Im\,\varphi)$
Celkem tedy: $dim(im\,\varphi)+dim(Ker\,\varphi)=dim\,U+0=dim\,U$.
ad (II): Rozlišíme dva případy:
(a) $Ker\,\varphi=U$ (b) $Ker\,\varphi \subset U$
ad (a): Pro každé $\vec{x} \in U$ je $\varphi(\vec{x})=\vec{0}$ takže $Im\,\varphi=\{\vec{0}\}$. Pak
$dim(Im\,\varphi)+dim(Ker\,\varphi)=0+dim\,U=dim\,U$.
ad (b): Buď $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ báze podprostoru $Ker\,\varphi$. Dle 2.4.4.(b) existují vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_l$ ($l \in \mathbb{N}$) takové, že $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_l\}$ je báze prostoru U. Ukážeme, že $\{\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_l)\}$ je báze podprostoru $Im\,\varphi$.



$\langle\{\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_l)\}\rangle=Im\,\varphi$:
$\subseteq$: Stačí si uvědomit, že $\{\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_l)\} \subseteq Im\,\varphi$.
$\supseteq$: Nechť $\vec{y} \in Im\,\varphi$. Existuje $\vec{x} \in U$ tak, že $\varphi(\vec{x})=\vec{y}$. Existují $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_l \in T$, $\vec{x}=c_1 \cdot \vec{v}_1+\cdots+c_k \cdot \vec{v}_k+d_1 \cdot \vec{u}_1+\cdots+d_l \cdot \vec{u}_l$. Pak

$$\begin{aligned}\vec{y}&=\varphi(\vec{x})=\varphi(c_1 \cdot \vec{v}_1+\cdots+c_k \cdot \vec{v}_k+d_1 \cdot \vec{u}_1+\cdots+d_l \cdot \vec{u}_l)\\ &=c_1 \cdot \varphi(\vec{v}_1)+\cdots+c_k \cdot \varphi(\vec{v}_k)+d_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1)+\cdots+d_l \cdot \varphi(\vec{u}_l)\\ &=c_1 \cdot \vec{0}+\cdots+c_k \cdot \vec{0}+d_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1)+\cdots+d_l \cdot \varphi(\vec{u}_l)\\ &=d_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1)+\cdots+d_l \cdot \varphi(\vec{u}_l) \in \langle\{\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_l)\}\rangle.\end{aligned}$$

Vektory $\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_l)$ jsou lineárně nezávislé: Nechť $a_1, \ldots, a_l \in T$, $a_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1)+\cdots+a_l \cdot \varphi(\vec{u}_l)=\vec{0}$. Chceme: $a_1=\ldots=a_l=0$. Je $\vec{0}=a_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1)+\cdots+a_l \cdot \varphi(\vec{u}_l)=\varphi(a_1 \cdot \vec{u}_1+\cdots+a_l \cdot \vec{u}_l)$. Vidíme, že $a_1 \cdot \vec{u}_1+\cdots+a_l \cdot \vec{u}_l \in Ker\,\varphi$.
Existují tedy $b_1, \ldots, b_k \in T$, $a_1 \cdot \vec{u}_1+\cdots+a_l \cdot \vec{u}_l=b_1 \cdot \vec{v}_1+\cdots+b_k \cdot \vec{v}_k$. Pak $b_1 \cdot \vec{v}_1+\cdots+b_k \cdot \vec{v}_k+(-a_1) \cdot \vec{u}_1+\cdots+(-a_l) \cdot \vec{u}_l=\vec{0}$. Z lineární nezávislosti vektorů $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_l$ vyplývá $a_1=\cdots=a_l=0$.
Konečně, $dim(Im\,\varphi)+dim(Ker\,\varphi)=l+k=dim\,U$.