1 Parciální derivace

1.1 Definice a vlastnosti

DEFINICE 1 (Definice parciálních derivací)**.** *Parciální derivace* funkce f podle první (druhé) proměnné v bodě (x_0, y_0) svého definičního oboru je derivace funkce jedné proměnné $f(x, y_0)$ (resp. $f(x_0, y)$) v bodě x_0 (resp. y_0).

Značí se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,, \text{resp.} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

Občas se používá značení $f_x(x_0, y_0)$, resp. $f_y(x_0, y_0)$.

TVRZENÍ 1 (Parciální derivace aritmetických operací)**.**

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\,.$$

TVRZENÍ 2 (Spojitost a derivace)**.** *Má-li funkce f v nějakém okolí bodu p omezené parciální derivace, je f v p spojitá.*

1.2 Smíšené derivace

Parciální derivace vyšších řádů se definují stejně, jako derivace vyšších řádů pro funkce jedné proměnné. Např. $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x^2}$ značí druhou parciální derivaci podle x z parciální derivace podle y z parciální derivace funkce f podle x. Tj., nejdříve derivujeme f podle x, pak výsledek podle y a pak výsledek dvakrát podle x.

TVRZENÍ 3 (Rovnost smíšených derivací)**.** *Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě (x_0, y_0), pak se v tomto bodě rovnají.*

Obdobně pro další smíšené parciální derivace.
Má-li funkce všechny parciální derivace v nějakém bodě až do řádu n spojité, pak u všech parciálních derivací do řádu n nezáleží na pořadí derivování.

1.3 Derivace složené funkce

TVRZENÍ 4 (Derivace složené funkce)**.** *Nechť $f(x, y)$ má spojité parciální derivace v bodě (x_0, y_0), funkce $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ mají parciální derivace v bodě (u_0, v_0) a $x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Pak $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ má parciální derivace v bodě (u_0, v_0) a platí*

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\,.$$

1.4 Směrové derivace

DEFINICE 2 (Směrové derivace)**.** Nechť (u, v) je nenulový vektor v rovině. Pak *derivace ve směru* (u, v) funkce f dvou proměnných v bodě (x_0, y_0) je derivace funkce jedné proměnné t

$$f(x_0 + t \cdot \frac{u}{|(u, v)|}, y_0 + t \cdot \frac{v}{|(u, v)|}) \quad \text{v bodě} \;\; t = 0\,.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ je parciální derivace f ve směru $(1, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ je ve směru $(0, 1)$.

TVRZENÍ 5 (Směrové derivace pomocí parciálních)**.** *Má-li f v bodě (x_0, y_0) obě parciální derivace spojité, pak derivace f ve směru jednotkového vektoru (u, v) v bodě (x_0, y_0) je rovna*

$$f_x(x_0, y_0) \cdot u + f_y(x_0, y_0) \cdot v\,.$$

Je-li α úhel, který svírá vektor (u, v) s kladným směrem osy x, pak derivace f ve směru (u, v) v bodě (x_0, y_0) je rovna

$$f_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha\,.$$

2 Použití derivací

2.1 Tečná rovina

Má-li f v bodě (x_0, y_0) spojité parciální derivace, lze rovinu danou rovnicí

$$(z - f(x_0, y_0)) = (x - x_0)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

chápat jako *tečnou rovinu* grafu funkce f.

Tečná rovina je tedy dána bodem dotyku $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a vektory $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$, $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$. Tečny grafu f v libovolném směru leží v tečné rovině (vše za předpokladu spojitosti parciálních derivací).

2.2 Gradient

DEFINICE 3. *Gradient* funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) je vektor

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \Big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \Big) .$$

gradnebo ∇ bez proměnné lze chápat jako operátor $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ a potom je $\mathrm{grad} f = \nabla f$ hodnotou operátoru v bodě f. Operátor ∇ je lineární a na součinech se chová obdobně, jako derivace:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g\,, \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f\,.$$

Skalární součin $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ se značí jako $\triangle$, což je Laplaceův operátor:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Parciální derivace funkce f ve směru (u, v) je v případě spojitých parciálních derivací tedy rovna skalárnímu součinu $\mathrm{grad} f \cdot (u, v)/|(u, v)|$. Geometricky ukazuje $\mathrm{grad} f$ směr největšího růstu funkce f.

3 Implicitní funkce a Taylorovy polynomy

3.1 Funkce dvou proměnných

TVRZENÍ 6 (Věta o implicitní funkci $f(x, y) = 0$)**.** *Mějme funkci f dvou proměnných definovanou v okolí bodu (x_0, y_0). Předpokládejme*

- *$f(x_0, y_0) = 0$,*
- *f má v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace až do řádu $n \geq 1$,*
- *$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.*

Pak existuje interval $U = I \times J$ bodu (x_0, y_0) a jediná funkce φ definovaná na I do intervalu J tak, že

1. *$\varphi(x_0) = y_0$,*
2. *$f(x, \varphi(x)) = 0$ pro všechna $x \in I$*
3. *φ má na I spojité derivace až do řádu n.*

Derivace funkce φ je rovna

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\,.$$

3.2 Funkce tří proměnných

TVRZENÍ 7 (Věta o implicitní funkci $f(x,y,z)=0$)**.** *Mějme funkci f tří proměnných definovanou v okolí bodu (x_0,y_0,z_0). Předpokládejme*

- $f(x_0,y_0,z_0)=0$,
- *f má v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) spojité parciální derivace až do řádu $n\ge 1$,*
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Pak existuje interval $U=I\times J\times K$ okolo bodu (x_0,y_0,z_0) a jediná funkce φ definovaná na $I\times J$ do intervalu K tak, že

1. $\varphi(x_0,y_0)=z_0$,
2. *$f(x,y,\varphi(x,y))=0$ pro všechna $(x,y)\in I\times J$*
3. *φ má na $I\times J$ spojité parciální derivace až do řádu n.*

Parciální derivace funkce φ jsou rovny

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,.$$

3.3 Taylorovy rozvoje

TVRZENÍ 8 (Taylorův polynom)**.** *Má-li f spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ v intervalu I okolo bodu (a,b), pak pro $(x,y)\in I$ platí*

$$f(x,y)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f_s^{(j)}(a,b)}{j!}|(x,y)-(a,b)|^j+\frac{f_s^{(n+1)}(c,d)}{(n+1)!}|(x,y)-(a,b)|^{n+1}$$

kde $f_s^{(j)}$ je j-tá derivace f ve směru $(x,y)-(a,b)$ a (c,d) je bod ležící na úsečce mezi body (a,b) a (x,y).

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^j f(a,b)}{j!}+\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(c,d)}{(n+1)!}\,,$$

kde

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^j f(a,b)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}h^ik^{j-i}\frac{\partial^j f}{\partial x^i\partial y^{j-i}}(a,b)\,.$$

TVRZENÍ 9 (Věta o střední hodnotě)**.** *Nechť f má spojité parciální derivace prvního řádu v intervalu I okolo bodu (a,b). Pak pro $(x,y)\in I$ existuje bod (c,d) ležící mezi body (a,b) a (x,y) takový, že*

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(c,d)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(c,d)\cdot(y-b)\,.$$

4 Geometrie

Tečna křivky zadané implicitně rovnicí $f(x,y)=0$ je ve svém bodě (x_0,y_0), kde $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$, dána směrem vektoru $(-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x})$ a její normála směrem $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$.

Tato tečna má tedy rovnici

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}=0\,.$$

Tečná rovina plochy zadané implicitně rovnicí $f(x,y,z)=0$ je ve svém bodě (x_0,y_0,z_0), kde $\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0$, dána vektory $(-\frac{\partial f}{\partial z},0,\frac{\partial f}{\partial x})$, $(0,-\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial y})$, její normála směrem $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$.

Tato tečná rovina má tedy rovnici

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

Tečna křivky zadané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \tau(t)$ je ve svém bodě (x_0, y_0, z_0), pro $t = t_0$, dána směrem vektoru $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \tau'(t_0))$.

Pro křivku $f(x, y) = 0$ nebo plochu $f(x, y, z) = 0$ je $\mathrm{grad} f$ směr normály v daném bodě.