1 Konvergence

DEFINICE 1 (Bodová konvergence posloupnosti)**.** Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, tj.

$$\forall \varepsilon \forall x \in M\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \geq k\ \left(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right).$$

Obvyklé značení je $\lim f_n = f$ nebo $f_n \to f$.

DEFINICE 2. Bodový součet řady zobrazení $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i$ je bodová limita posloupnosti částečných součtů $\{\sum\limits_{i=0}^{n} f_i\}_n$.

Lze také definovat $\left(\sum f_n\right)(x) = \sum f_n(x)$. Jak je obvyklé z teorie řad čísel, i řady funkcí nebo jejich součet se značí $\sum f_n$.

Vlastnosti
Pro bodovou konvergenci na množině M platí (a, b jsou reálná čísla):

1. $\lim_n(af_n + bg_n) = \lim_n f_n + \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.
2. $\lim_n(f_n g_n) = \lim_n f_n\ \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.
3. $\lim_n(f_n/g_n) = \lim_n f_n / \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.
4. $\sum_n(af_n + bg_n) = a\sum_n f_n + b\sum_n g_n$, má-li pravá strana smysl.

1.1 Stejnoměrná konvergence

DEFINICE 3 (Stejnoměrná konvergence posloupnosti)**.** Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall n \geq k\ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Obvyklé značení je $f_n \rightrightarrows f$.

DEFINICE 4 (Stejnoměrná konvergence řady)**.** Nechť M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \to \mathbb{R}$. Řada $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže posloupnost částečných součtů $\{\sum\limits_{i=0}^{n} f_i\}_n$ konverguje stejnoměrně k f, tj.

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall n \geq k\ \left(\Big| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f(x) \Big| < \varepsilon \right).$$

TVRZENÍ 1 (Vlastnosti)**.**
1. *Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ k f stejnoměrně na M, konverguje na M k f i bodově.*
2. *(Bolzanova–Cauchyova podmínka) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k nějaké funkci právě když platí:*

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m, n \geq k\ (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

3. *Řada $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně právě když platí:*

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\ \left(\Big| \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x) \Big| < \varepsilon \right).$$

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad lze též přepsat pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:

$$\forall \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall m > l > k\ \left(\Big| \sum_{n=l}^{m} f_n(x) \Big| < \varepsilon \right).$$

TVRZENÍ 2 (Kritéria stejnoměrné konvergence). *1. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f právě když platí*

$$\lim_n \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

2. *Jestliže $\sum f_n$ má na M majorantní stejnoměrně konvergentní řadu (tj., existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \le g_n(x)$ pro každé n a každé $x \in M$), pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.*

3. *Nechť $|f_n(x)| \le c_n$ pro každé $x \in M$ a $\sum c_n$ konverguje. Pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.*

4. *Nechť $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou dvě posloupnosti funkcí na intervalu I. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje na I stejnoměrně, jestliže $\{f_n\}$ je monotónní a buď*

   *(a) (**Dirichlet**) f_n konverguje stejnoměrně k 0, $\{g_n\}$ má stejně omezené částečné součty,* *nebo*

   *(b) (**Abel**) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I,*

1.2 Vlastnosti stejnoměrné konvergence

TVRZENÍ 3 (Zachovávání spojitosti). *1. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (stejnoměrně) spojitých funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá na M.*

2. *Nechť řada $\sum f_n$ (stejnoměrně) spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Potom je f (stejnoměrně) spojitá na M.*

TVRZENÍ 4 (Zachovávání limit). *1. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci f. Pro libovolný hromadný bod a množiny M platí*

$$\lim_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)\,.$$

2. *Nechť řada $\sum f_n$ spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně. Potom pro libovolný bod $a \in I$ je*

$$\sum_n \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_n f_n(x)\,.$$

TVRZENÍ 5 (Integrace a konvergence). *1. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Je-li $\{F_n\}$ posloupnost primitivních funkcí k f_n na I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I, pak $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.*

2. *Nechť $\sum f_n$ je řada funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f. Jsou-li F_n primitivní funkce k f_n na I takové, že řada $\sum F_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě x z I, pak $\sum F_n$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I.*

TVRZENÍ 6 (Určitý integrál a konvergence). *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$.*

1. *Jestliže $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f, pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

2. *Jestliže $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f, pak pro libovolný interval $[a,b] \subset I$ platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

TVRZENÍ 7 (Derivace a konvergence).

1. *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I, která konverguje alespoň v jednom bodě z I a $\{f_n'\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci g. Potom $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.*
2. *Nechť $\sum f_n$ je řada spojitých funkcí na omezeném intervalu I v $\mathbb{R}$, a řada $\sum f_n'$ na I konverguje stejnoměrně k funkci g. Potom $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.*

2 Mocninné řady

DEFINICE 5 (Mocninná řada)**.** Mocninná řada je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, kde $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$. Bod x_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

Protože uvedená řada vznikne posunutím řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o číslo x_0, budeme v dalším zkoumat jen řadu se středem 0.

2.1 Poloměr konvergence

TVRZENÍ 8 (Poloměr konvergence)**.** *Pro každou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existuje číslo $\varrho \in [0, +\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{x; |x| < \varrho\}$ a diverguje na množině $\{x; |x| > \varrho\}$. Platí*

$$\varrho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(= \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}, = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \textit{pokud limity existují} \right)$$

Číslo ϱ se nazývá poloměr konvergence dané mocninné řady.

TVRZENÍ 9 (Stejnoměrná a absolutní konvergence).

1. *Je-li $q \in (0, \varrho)$, pak řada konverguje stejnoměrně a absolutně na množině $\{x; |x| \le q\}$.*
2. *Součtem mocninné řady je funkce spojitá na množině $\{x; |x| < \varrho\}$.*

2.2 Derivace a integrál

TVRZENÍ 10 (Derivace a integrál).

1. *Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence ϱ má součet $f(x)$. Potom na intervalu $(-\varrho, \varrho)$ platí*
   - *$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (poloměr konvergence ϱ).*
   - *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ je primitivní funkce k f (poloměr konvergence ϱ).*
   - *pro $(a,b) \subset (-\varrho, \varrho)$ je*

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})\,.$$

2. *Nechť funkce f je na otevřeném intervalu součtem mocninné řady. Pak f má na tomto intervalu derivace všech řádů.*

TVRZENÍ 11 (Taylorova řada)**.** *Nechť funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potom a_n jsou Taylorovy koeficienty funkce f v bodě 0, tj. $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

TVRZENÍ 12 (Abelova věta)**.** *Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(-\rho, \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Tato mocninná řada konverguje v bodě ρ (nebo $-\rho$) právě když tato mocninná řada konverguje na $[0, \rho)$ (resp. na $(-\rho, 0]$) stejnoměrně.*

To nastane právě když konverguje $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$; tento součet se pak rovná $\lim\limits_{x \to \rho-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. (Obdobně pro $-\rho$.)