Matice v matice a Fibonacciova posloupnost

Hana Turčinová

1 Matice bez šroubů

Slovo matice je v českém jazyce takzvané homonymum - má různé významy. Běžný smrtelník si je pravděpodobně ihned spojí se slovem „šroub“ a přiřadí je do pracovního kufříku nějakého instalatéra či rovnou na nějaké mostní konstrukce nebo koleje.

Matematik si (málokdy až poté, co si uvědomí, že mluví s některým jiným matematikem) však představí obdélníkové schéma čísel, předmět zkoumání algebraiků, který patří do myšlených pracovních kufříků téměř jakýchkoli jiných matematiků, fyziků, informatiků, inženýrů…

Pakliže jezdíte na Letní školu matematiky a fyziky, pravděpodobně z vás nějaký takový vědec bude a i ve vašem pracovním kufříku najdou matice své využití. Proto není nač čekat, seznamte se s nekovovými obdélníkovými maticemi co nejdříve. Na LŠMF 2018 jsme tak učinili, seznámili jsme se s definicí, základními maticovými výpočty a jejich využitím například pro řešení soustav lineárních rovnic, ale třeba i pro cestování či webové vyhledávače. Pro studium těchto témat odkazujeme laskavého čtenáře na libovolná skripta z lineární algebry, na semestrální kurz Lineární algebra I na matfyzu nebo na podobné zdroje užitečných informací.

V závěru našeho šluknovského povídání jsme však matice využili ještě k něčemu dalšímu. S jejich pomocí jsme našli vzorec pro n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti, a to poměrně neobvyklým a při znalosti základních poznatků o maticích jednoduchým způsobem. Pojďme si to připomenout.

2 Fibonacciovi králíci

Fibonacciovou posloupností je nazývána nekonečná posloupnost přirozených čísel, která je dána rekurentním vyjádřením:

- $a_1 = 1$,
- $a_2 = 1$,
- $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pro $n \geq 2$.

Vypíšeme prvních několik členů Fibonacciovy posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,… Těmto číslům se také říká Fibonacciova čísla.

Fibonacciova posloupnost byla pravděpodobně poprvé popsána v *Liber Abaci*, Knize počtů, vydané v roce 1202 italským matematikem Leonardem Pisánským zvaným též Fibonacci. Tato kniha má dodnes velký význam pro Evropu, Ameriku a mnoho jiných částí světa, neboť zde byly poprvé představeny Evropanům arabské číslice. Fibonacci zde ilustroval výhody využití arabských číslic na několika příkladech, mezi nimiž zřejmě byla i úloha o králících.

Úloha se zabývala růstem populace králíků za několika zjednodušených podmínek:

- První měsíc se narodí jeden pár králíků.
- Každý králičí pár může mít malé králíčky až po dvou měsících svého života.
- Každý měsíc se narodí každému produktivnímu páru králíků jeden pár králíčků.
- Králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní, vesele se množí.

Úlohou bylo popsat množství párů králíků v n-tém měsíci. A vycházela posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,…, kterou jsme výše popsali rekurentním vzorcem. Na první pohled není vidět, jak bychom explicitně popsali n-tý člen této posloupnosti. A aby také ano, vždyť brzy zjistíme, že se ve vzorci objevují iracionální čísla. Je až překvapující, že vzorec pro n-tý člen tak jednoduše vypadající posloupnosti přirozených čísel obsahuje komplikovanou manipulaci s iracionálními čísly.

Pro získání explicitního vzorce pro n-tý člen posloupnosti existuje několik metod. Nejpoužívanější je pravděpodobně vyřešení diferenční rovnice. My jsme si ve Šluknově zvolili metodu neobvyklejší, jež využívá pouze lineární algebru, kterou jsme předtím procvičili. (Nicméně i zde bychom po chvilce mohli najít nějaké souvislosti s metodou diferenčních rovnic. Návodná slova pro sečtělejší čtenáře: dynamické systémy.) Pusťme se tedy do hledání explicitního vzorce.

3 Králíci v matici

Přepišme problém do matic a vektorů: definujme

$$\overrightarrow{a_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak pro matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

platí

$$B\overrightarrow{a_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+1} + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \overrightarrow{a_{n+1}}.$$

To znamená, že pro $n \geq 2$ postupným vyjadřováním prvků $\overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{a_{n-1}}, ..., \overrightarrow{a_2}$ dostaneme vzorec $\overrightarrow{a_n} = B^{n-1}\overrightarrow{a_1}$. Pokud bychom tedy uměli rychle mocnit matici B, dostaneme v prvním řádku vektoru $\overrightarrow{a_n}$ explicitní vzorec pro n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti.

V tom nám pomohou takzvaná *vlastní čísla matice*: $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme vlastním číslem matice A, jestliže existuje nenulový vektor $\overrightarrow{v}$ takový, že $\lambda\overrightarrow{v} = A\overrightarrow{v}$. Vektor $\overrightarrow{v}$ se nazveme *vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu* λ, jestliže $\lambda\overrightarrow{v} = A\overrightarrow{v}$.

Například matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní číslo rovné 2 a vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2 jsou všechny prvky $\mathbb{C}^2$. Takovou matici umíme i snadno umocnit na n-tou a platí:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \overrightarrow{v} = 2^n \overrightarrow{v}.$$

Povšimněme si, že umocňovaná matice je diagonální, tedy má nenulové prvky jen na hlavní diagonále. Takové matice se umocňují snadno. Na podobném principu funguje i umocňování libovolné čtvercové matice, která se však nejdříve musí převést do takzvaného Jordanova kanonického tvaru. Ten obsahuje snadno mocnitelnou matici vytvořenou z vlastních čísel původní matice.

Proto nyní chceme nalézt vlastní čísla naší matice B, která charakterizovala rekurentní vzorec Fibonacciovy posloupnosti. Jak se ale taková vlastní čísla hledají? Víme, že musí platit $\lambda\overrightarrow{v} - B\overrightarrow{v} = 0$, tedy $(\lambda I - B)\overrightarrow{v} = 0$. Tudíž řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda - 1 & 0 \end{array}\right).$$

V druhém řádku nám vyšla rovnice s parametrem $\left(\lambda^2 - \lambda - 1\right) v_2 = 0$. Kdyby se v_2 rovnalo nule, pak by v prvním řádku vyšlo v_1 také nula a byl by porušen požadavek, že $\overrightarrow{v}$ má být nenulový vektor. Tedy musí platit $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Řešením této kvadratické rovnice jsou čísla $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Poznamenejme, že první z nich není žádné jiné číslo, než slavný *zlatý řez*, symbol krásy nejen v matematice, ale i v různých (jiných) uměleckých oborech. V umělecké fotografii nebo malířství je poměr zlatého řezu známý jako ideální pozice, kam umístit zobrazovaný objekt. Tento trik se však objevuje i v hudbě, jak dokazuje například Beethovenova Symfonie č. 5 c moll. Zda tento autor umístil nejznámější melodii právě do zlatého řezu první věty intuitivně, nebo propočtem, se můžeme jen domnívat.

Nyní nalezneme vlastní vektory příslušející vlastním číslům matice. Opět řešíme stejnou soustavu, tentokrát však s konkrétními čísly λ. Jelikož jsme zajistili, aby byl druhý řádek nulový, v prvním řádku máme jistou volnost, řešení takové soustavy bude mnoho. Proto si můžeme zvolit například druhou složku vektoru jako číslo 1, a první dopočítáme. Dostáváme, že vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je například $\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)^T$ a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ je například $\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)^T$.

Nyní máme vše, co potřebujeme k vytvoření Jordanova kanonického tvaru. Čtenáře, kteří by tuto látku chtěli lépe nastudovat, opět odkazujeme na výše zmíněnou literaturu. Pro ostatní nyní možná provedeme malé kouzlo. Výpočtem můžete ověřit, že platí

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

První matici jsme vytvořili z vlastních vektorů příslušných vlastním číslům, a to ve stejném pořadí, v jakém jsme vlastní čísla položili na diagonálu druhé matice. Třetí matice je matice inverzní k první matici, tedy opět můžete výpočtem ověřit, že platí

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní chceme upravit vzorec $\overrightarrow{a_n} = B^{n-1}\overrightarrow{a_1}$ pomocí získaného tvaru matice B, tedy

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Mocnina se postupně schovala do diagonální matice, neboť jsme využili vlastností inverzních matic. Pokud totiž mocninu rozepíšeme jako několik součinů za sebou, vedle sebe se zde pak vyskytují matice k sobě inverzní a jejich součin se rovná jednotkové matici.

Postupným roznásobením matic vektorem napravo dostaneme

$$
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \frac{1}{\sqrt{5}} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \frac{1}{\sqrt{5}} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} (\frac{3+\sqrt{5}}{2}) \frac{1}{\sqrt{5}} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} (\frac{3-\sqrt{5}}{2}) \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},
$$

a tedy konečně i explicitní vzorec pro n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti

$$
a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{5}},
$$

ve kterém se vyjímá zlatý řez. Řekněte sami, není matematika také umění?

Reference

[1] L. Barto a J. Tůma. Lineární algebra. Skripta pro MFF UK. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~tuma/LA2-17/skripta_la6.pdf`

[2] Zlatý řez v hudbě. `https://www.cmuse.org/classical-pieces-with-the-golden-ratio/`

[3] Wikipedia - Leonardo Fibonacci. `https://cs.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci`.